Зміст

Передмова

Навчальний посібник присвячений чисельним методам, спеціальним розділам вищої математики, за допомогою яких знаходимо наближені розв'язання нелінійних рівнянь, визначених інтегралів, звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальних рівнянь у частинних похідних і апроксимації функцій за допомогою методу найменших квадратів. У посібнику по кожному методу наводяться приклади з використанням табличного процесора MS Excel і мови програмування Visual Basic for Application (VBA).

Мета дисципліни — формування у студентів знань і навичок для самостійного застосування чисельних методів при розв'язуванні сучасних інженерних задач з використанням новітніх інформаційних технологій.

Завдання дисципліни полягає в тому, щоб на належному рівні надати студентам теоретичні й практичні знання із спеціального розділу вищої математики, присвяченого чисельним методам.

Предметом дисципліни є інженерні задачі, розв'язання яких вимагає знання чисельних методів.

Після самостійного вивчення кожного чисельного методу студент повинен розібрати й вирішити приклади, відповісти на запитання і виконати свій варіант розрахунково-графічної роботи з використанням MS Excel за варіантами.

1. Наближене розв’язання рівнянь

1.1. Методи наближеного розв’язання рівнянь

Для більшості рівнянь немає можливості отримати точне розв’язання. Насамперед це стосується трансцендентних рівнянь, в яких невідома знаходиться під знаком трансцендентної функції. Доведено, що не можна побудувати формулу, по якій можна було б вирішити довільні рівняння алгебри ступеня вище четвертою.

Проте, якщо ми зуміємо приблизно визначити корінь рівняння із заданим ступенем точності і вказати межу можливої похибки, то задачу відшукання кореня можна вважати розв’язаною.

Розглядатимемо довільне рівняння:

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Побудуємо на відповідному інтервалу графік функції $y = f(x)$. Тоді точка перетину графіка з віссю Ox і є коренем рівняння. Такої точки може і не бути, а може бути одна один або декілька на заданому інтервалі.

У простих випадках рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$f_1(x) = f_2(x). \tag{1.2}$$

Тоді абсциса точки перетину графіків $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ буде коренем рівняння (1.1). Наприклад, на рис. 1.1 наведено графічне розв’язання рівняння $x - 1 = \sin x$ на відрізку $[0;3]$.

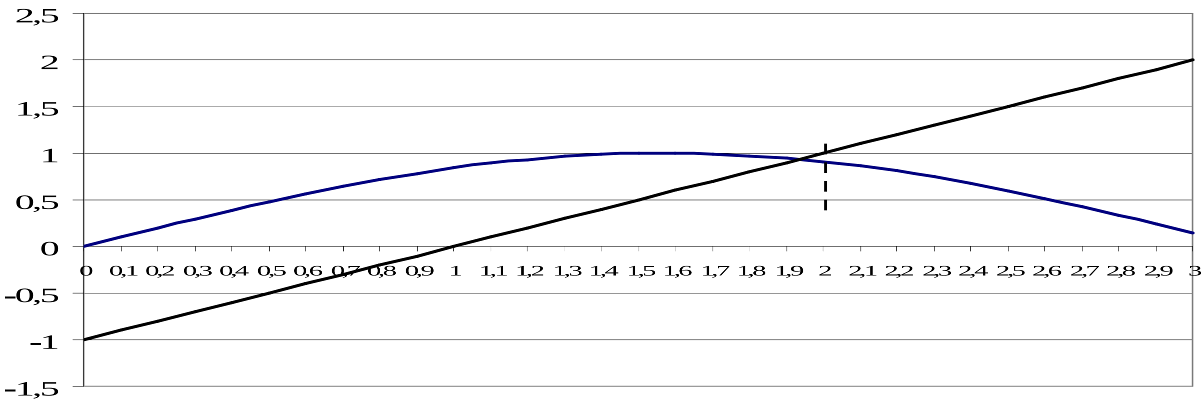


Рис. 1.1 – Графічне розв’язання рівняння (1.2), корінь $x_c \approx 1{,}935$

Графічний спосіб знаходження коренів рівнянь використовується рідко, бо похибка розв'язання велика. Перейдемо до опису аналітичних способів розв'язання рівняння (1.1). Припускається, що функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, і на ньому знаходиться хоча б один корінь. Проблема полягає в тому, що невідома кількість коренів рівняння на даному відрізку. Тому на першому етапі рекомендується знайти значення функції в n точках відрізка, причому рекомендується вибрати значення n таким, щоб $h = \frac{b-a}{n} \le 0.1$. Одночасно перевіряється виконання нерівності $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$, яка вказує на існування в інтервалі $[x_{i-1}; x_i]$ кореня даного рівняння (1.1). Таким чином, ми визначимо кількість і місцезнаходження усіх коренів рівняння (1.1) на відрізку $[a,b]$.

На другому етапі виконується уточнення чисельної величини кожного кореня. Для цього пропонується використовувати наступні чисельні методи.

Метод половинного ділення. У цьому випадку інтервал, у якому виконується нерівність (1.3), ділиться навпіл $x_C = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, і обчислюється значення функції $f(x_C)$. У разі виконання нерівності $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ вважаємо $x_{i-1} = x_C$ (рис 1.2). Інакше, присвоюємо $x_i = x_C$ (рис. 1.3). Процедура повторюється, якщо довжина інтервалу $|x_{i-1} - x_i| > \varepsilon$, де ε - дана похибка.

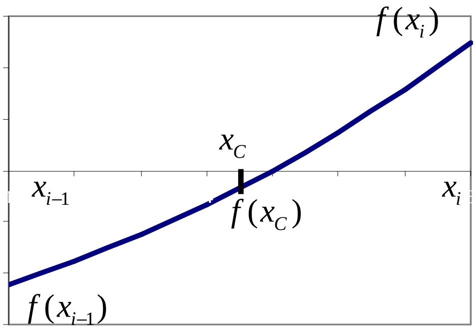


Рис 1.2 – Виконується $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$

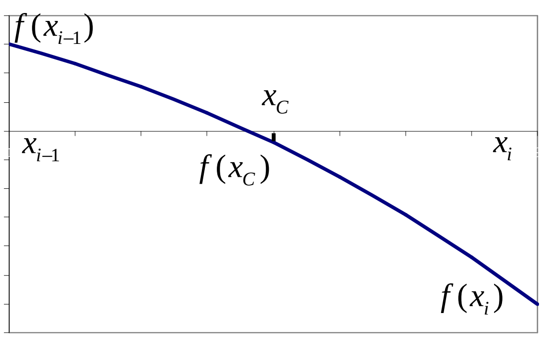


Рис 1.3 – Виконується $x_i = x_C$

Цей метод є безумовно збіжний, якщо на інтервалі $[a, b]$ існує хоча б один корінь. Крім того, метод не використовує похідних. До недоліків відносять повільну збіжність, тобто він потребує достатньо велику кількість разів обчислювати функцію *f(x)* в порівнянні з іншими методами. Рекомендується для використання в тих випадках, якщо немає жорстких вимог до використання часу ПЕВМ.

Метод хорд. Через точки з координатами $\{x_{i-1}; f(x_{i-1})\}$, $\{x_i; f(x_i)\}$ проводиться хорда (рис .1.4), рівняння якої має вигляд

$$\frac{y - f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \quad (1.3).$$

Точка перетину її з віссю Ох визначається за формулою:

$$x_C = x_{i-1} - \frac{(x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}. \quad (1.4)$$

У разі виконання нерівності $f(x_C) \cdot f(x_i) < 0$ вважаємо $x_{i-1} = x_C$. Інакше присвоюємо $x_i = x_C$. Потім розрахунки повторюємо, якщо $|x_{i-1} - x_i| > \varepsilon$ де ε - задана похибка.

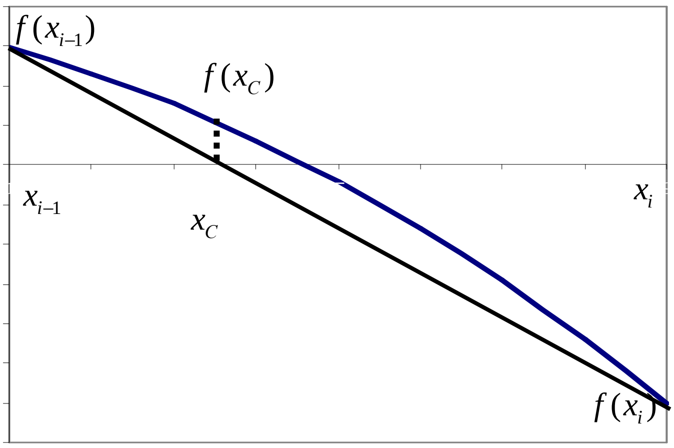


Рис. 1.4 – Метод хорд

Метод дотичних (Ньютона). Візьмемо деяку точку $c \in [x_{i-1}; x_i]$ і проведемо в точці $\{c; f(c)\}$ дотичну. Рівняння дотичної у точці *x=c* до функції y=*f(x)* має вигляд $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$. За наближений корінь рівняння приймемо абсцису точки перетину дотичної з віссю *Ox*.

$$x_C = c - \frac{f(c)}{f'(c)}. \quad (1.5)$$

Залишається вирішити питання про вибір точки *c*. На рис. 1.5 прийнято *c=b*, бо крива увігнута. Звичайно приймають *c=a* або *c=b*, виходячи з того, що знак функції повинен збігатися зі знаком другої похідної. У цьому випадку можна гарантувати, що наближене значення кореня, отримане за способом дотичних, лежить в інтервалі $[x_{i-1}; x_i]$.

При використанні MS Excel і VBA застосовувати метод Ньютона нераціонально. Досить провести розрахунки за допомогою методів половинного ділення або хорд.

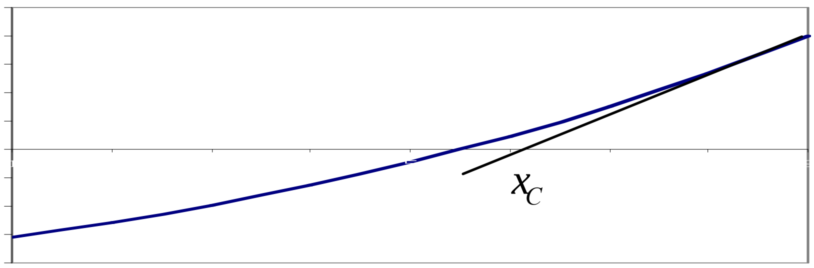


Рис. 1.5 – Метод Ньютона

Приклад. Розв’язати рівняння $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$, якщо x∈ [0;2].

Розв’язання. Поділимо відрізок на 20 інтервалів завдовжки 0,1. Підрахуємо значення функції у точках розбиття за допомогою MS Excel і побудуємо графік даної функції за обчисленими величинами (рис 1.6).

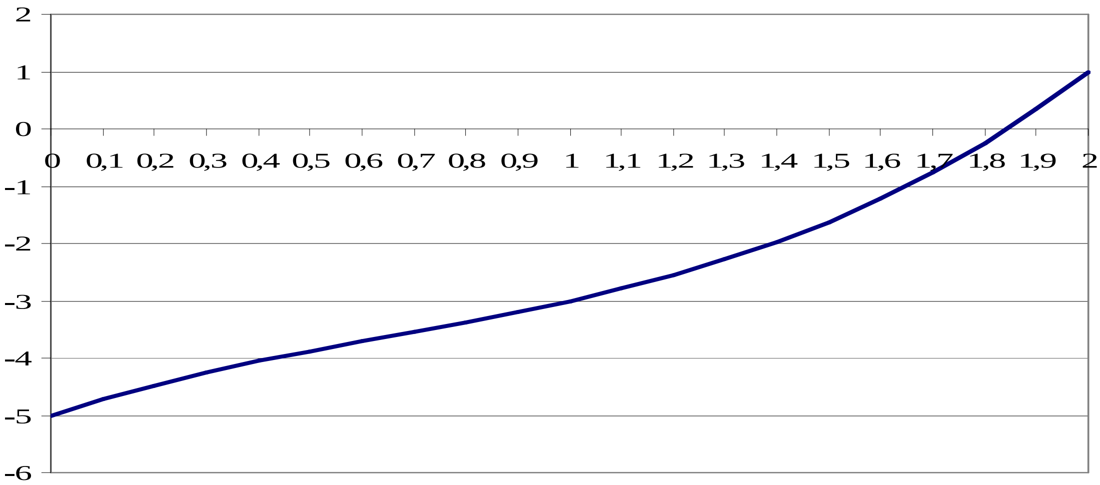


Рис. 1.6 – Пошук інтервалу, на кінцях якого функція має різні знаки

Одержаний графік дає можливість відразу вказати [1,8;1,9], в якому розташовано корінь рівняння.

Таким чином, вважаємо: $x_{i-1} = 1{,}8;\quad x_i = 1{,}9;\quad f(x_{i-1}) = -0{,}248;\ f(x_i) = 0{,}339$. Далі застосовуємо розглянуті вище методи знаходження кореня рівняння.

Метод половинного ділення.

Крок 1. Підрахуємо $x_C = (1{,}8 + 1{,}9)/2 = 1{,}85 \Rightarrow f(x_C) = 0{,}037$.

Оскільки $f(x_C)\cdot f(x_i) < 0$ *не виконується*, то вважаємо $x_i = x_C = 1.85$; інтервал [1,8;1,85] ділимо навпіл. Отже $x_{i-1} = 1{,}825$

Крок 2. Обчислюємо значення функції в цій точці: $f(x_C) = -0{,}10786$. Нерівність $f(x_C)\cdot f(x_i) < 0$ виконується на інтервалі [1,825; 1,85].

Крок 3. Отже $x_C = (1{,}85 + 1{,}825)/2 = 1{,}8375 \Rightarrow f(x_C) = -0{,}036$ і т.д.

Продовжуючи процес, одержимо корінь даного рівняння $x_C = 1{,}843731689$ при виконанні умови $x_{i-1} - x_i < \varepsilon = 0.00001$. Відзначимо, що $f(x_C) = -0{,}000015$. Як показали розрахунки, для досягнення цього результату знадобиться виконати 14 кроків.

Метод хорд.

Крок 1. За формулою (1.4) одержимо $f(x_C) = -0{,}00864$. Оскільки $f(x_C)\cdot f(x_i) < 0$ *виконується*, то вважаємо $x_{i-1} = x_C = 1{,}8422487$.

Крок 2. Знову обчислюємо $x_C = 1{,}8422487 - \dfrac{(1{,}9 - 1{,}8422487)\cdot(-0{,}00864)}{0{,}339 + 0{,}00864} = 1{,}843684$

і знаходимо $f(x_C) = 0{,}00029$. Оскільки $f(x_C)\cdot f(x_i) < 0$ не виконується, то вважаємо $x_i = x_C = 1{,}843684$ і т.д. Отже вже на другому кроці отримано задовільний результат.

Продовжуючи процес, одержимо корінь даного рівняння $x_C = 1{,}843734$ при виконанні умови $x_{i-1} - x_i < \varepsilon = 0{,}00001$. Відзначимо, що $f(x_C) = 0$. Як показали розрахунки, для досягнення цього результату знадобилося виконати 9 кроків.

Метод дотичних.

Крок 1. Обчислимо похідні $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3;\ f''(x) = 6x - 4$. На інтервалі [1,8; 1,9] похідні позитивні. У точці $x = 1{,}9$ знак функції співпадає з знаком другої похідної. Отже приймаємо *c=b*. За формулою (1.5) одержимо

$x_C = 1{,}9 - \dfrac{0{,}339}{6{,}23} = 1{,}846$ Оскільки $f(x_C) = 0{,}0132$, то на інтервалі [1,8; 1,846] можна знов застосувати метод дотичних.

Крок 2. Вважаємо *c=1,846*, тоді за (1.5) одержимо $x_C = 1{,}846 - \dfrac{0{,}0132}{5{,}8391} = 1{,}8438$.

Процес продовжується до отримання шуканого кореня з даною похибкою.

Для розв'язування розглянутої вище задачі можна застосувати **комбінований метод.** Це **метод хорд і дотичних,** який достеменно викладено у [8].

Метод ітерацій. У ряді випадків для розв'язання рівняння можна застосувати метод ітерацій (повторень). Для цього рівняння переписуємо у вигляді

$$x = \varphi(x) \tag{1.6}$$

Припустимо, що даний відрізок $[a,b]$ має корінь рівняння. Вибираємо довільну точку x_o (нульове наближення) і обчислюємо перше наближення: $x_1 = \varphi(x_o)$. Наступні наближення обчислюємо за формулою

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \tag{1.7}$$

Якщо послідовність $x_1, x_2, x_3 ...., x_n$ має границю x_c, то вона є коренем рівняння (1.6).

Проте може трапитися, що послідовність не має границі, тоді метод ітерації не приводить до мети. Умова збіжності ітераційного процесу визначається теоремою.

<u>Теорема</u>. Нехай рівняння $x = \varphi(x)$ має єдиний корінь на відрізку $[a,b]$ і виконані умови:

1. $\varphi(x)$ визначена і диференційована на відрізку [a,b];

2. $\varphi(x) \in [a,b]$ для всіх $x \in [a,b]$;

3. Існує таке дійсне число λ, що $|\varphi'| \le \lambda < 1$ для всіх $x \in [a,b]$.

Тоді ітераційна послідовність $x_n = \varphi(x_{n-1})$ збігається при будь-якому початковому наближенні $x_O \in [a,b]$

Відзначимо, що умови теореми не є необхідними. Це означає, що ітераційна послідовність може виявитися такою, що збігається і при невиконанні цих умов. Рівняння $f(x)=0$ перетворюється до вигляду (1.6) наступним чином: $x = x - mf(x)$,

де m – довільна константа. Тоді для виконання умови теореми досить підібрати m так, щоб виконувалася умова $|1-mf'(x)| \le 1$ на даному відрізку.

Приклад. Розв'язати методом ітерацій рівняння $4x-5\ln x=5$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $1{,}25(1+\ln x)=x$. Тут $\varphi(x)=1{,}25(1+\ln x)$ Побудуємо графіки функцій $y=\varphi(x)$ и $y=x$. Точки перетину графіків (рис. 1.7) визначають початкові наближення шуканих коренів.

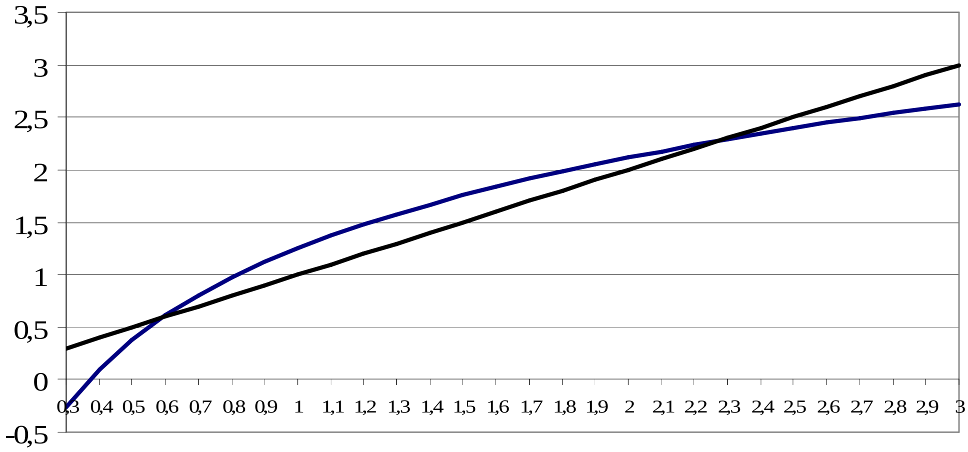


Рис. 1.7 – Визначення початкових наближень

На графіку дві точки перетину побудованих функцій, отже є два корені рівняння. Приймемо як початкове наближення $x_O=2{,}28$ для першого кореня. Ітераційний процес збігається, оскільки $0<\varphi'(x)=1{,}25/x<1$ в околі першого кореня.

При відшуканні другого кореня в околі $x_o=0.57$ ітераційний процес розбігається, оскільки перша похідна φ' більше одиниці. Тому початкове рівняння слід переписати у вигляді $x=e^{0.8x-1}$. Тоді $0<\varphi'=0.8e^{0.8x-1}<1$ в околі другого кореня.

У табл. 1.1 подані результати ітераційного процесу, виконаного за формулою (1.7):

Таблиця 1.1 – Обчислення коренів рівняння *4x-5lnx=5* методом ітерацій

n	Перший корінь		Другий корінь	
	x_n	$\varphi(x_{n-1})$	x_n	$\varphi(x_{n-1})$
1	2,28	2,28022	0,57	0,58042
2	2,28022	2,28034	0,58042	0,58528
3	2,28034	2,28041	0,58528	0,58756
4	2,28041	2,28044	0,58756	0,58863
5	2,28044	2,28046	0,58863	0,58914
6	2,28046	2,28047	0,58914	0,58938
7	2,28047	2,28048	0,58938	0,58949
8	2,28048	2,28048	0,58949	0,58954
9	2,28048	2,28048	0,58954	0,58957
10	2,28048	2,28048	0,58957	0,58958

Таким чином, знайдені два корені рівняння $x_{C1} = 0{,}58957;\ x_{C2} = 2{,}28048$. Ітераційний процес припиняється, якщо $\left|x_{h-1} - x_n\right| < \varepsilon$

1.2. Розрахунково-графічна робота № 1

Знайти корені даних рівнянь, склавши комп'ютерну програму з використанням MS EXCEL, яка реалізує методи половинного ділення хорд і ітерацій.

Варіант	задача 1	задача 1
1	$\ln x + (x+1)^3 = 0$	$x^3 + 2x^2 + 2 = 0$
2	$x \cdot 2^x - 1 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
3	$\sqrt{x+1} - 1/x = 0$	$x^3 - 2x + 2 = 0$
4	$x - \cos x = 0$	$x^3 + 3x - 1 = 0$
5	$3x + \cos x + 1 = 0$	$x^3 + x - 3 = 0$
6	$x + \ln x - 0{,}5 = 0$	$x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$
7	$2 - x - \ln x = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$
8	$(x-1)^2 - 0{,}5e^x$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 2 = 0$
9	$(2-x)e^x - 0{,}5 = 0$	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
10	$2{,}2x - 2^x = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$
11	$x^2 + 4\sin x = -1$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$
12	$2x - \ln x - 7 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
13	$5x - 8\ln x - 8 = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$
14	$3x - e^x = 0$	$x^3 + 2x + 4 = 0$
15	$x \cdot (x+1)^2 - 1 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$
16	$x - (x+1)^3 = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$
17	$x^2 - \sin x = 0$	$x^3 + 4x - 6 = 0$
18	$x^3 - \sin x = 0$	$x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$
19	$x - \sqrt{\ln(x+2)} = 0$	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
20	$x^2 - \ln(x+1) = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$
21	$2x + 0.2\ln x + 0{,}5 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
22	$2x + \cos x - 0{,}5 = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$
23	$\sin(0{,}5x) + 1 - x^2 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$
24	$0{,}5x - \ln(x-1) - 0{,}5 = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$
25	$\sin(0{,}5 + x) - 2x + 0{,}5 = 0$	$x^3 + 3x + 1 = 0$
26	$\ln(3 + x) + 3x - 4 = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$
27	$\ln(1 + 2x) + x - 2 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$
28	$2\sin(x - 0{,}6) - 1{,}5 + x = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 2 = 0$
29	$x + 0{,}36\ln(1 + x) - 1{,}5 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$
30	$x + \cos x + 1 = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}3x - 0{,}6 = 0$

Приклад виконання контрольної роботи. Розв’язати рівняння $x - \ln(2x+3) = -1$

Розв’язання На робочому листі MS Excel складемо таблицю, яка відображує значення функції $y = f(x) = x - \ln(2x+3) + 1$ у точках ділення відрізка і будуємо за ними графік:

Контрольная работа № 1

x	y
0	-0,0986
0,1	-0,0632
0,2	-0,0238
0,3	0,01907
0,4	0,065
0,5	0,11371
0,6	0,16492
0,7	0,2184
0,8	0,27394
0,9	0,33138
1	0,39056
1,1	0,45134
1,2	0,5136
1,3	0,57723
1,4	0,64214
1,5	0,70824
1,6	0,77545
1,7	0,8437

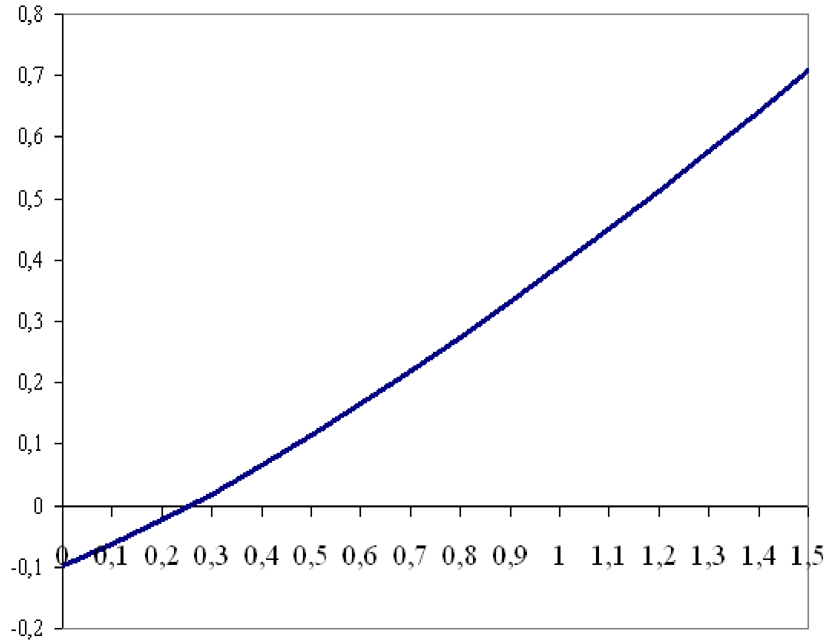


Рис. 1.8 – Значення і графік функції $y = f(x) = x - \ln(2x+3) + 1$

Згідно з графіком корінь рівняння знаходиться в інтервалі [0.2;0.3], його величину уточнюємо за розібраними методами.

<u>Метод ітерацій</u>. Як послідовне наближення вибираємо $x_o = 0{,}25$. Подамо рівняння у вигляді $x = \varphi(x) = \ln(2x+3) - 1$.

У MS Excel складемо таблицю, за результатами ітераційного процесу. Вводимо відповідні формули в елементи таблиці і розмножуємо їх по рядках таблиці (рис. 1.9). Таким чином, обчислений корінь рівняння дорівнює 0,25643. Ітераційний процес припинено, коли $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 10^{-5}$.

Метод половинного ділення. Для реалізації алгоритму, описаного вище складемо процедуру з використанням Visual Basic for Aplication (VBA). Необхідна інформація про VBA наведена в додатку 2.

=C26

=LN(2*B26+3)

	A	B	C
25	n	Xn	φ
26	1	0,250000	0,252763
27	2	0,252763	0,254341
28	3	0,254341	0,255240
29	4	0,255240	0,255753
30	5	0,255753	0,256045
31	6	0,256045	0,256211
32	7	0,256211	0,256306
33	8	0,256306	0,256360
34	9	0,256360	0,256391
35	10	0,256391	0,256408
36	11	0,256408	0,256418
37	12	0,256418	0,256424
38	13	0,256424	0,256427
39	14	0,256427	0,256429
40	15	0,256429	0,256430
41	16	0,256430	0,256430
42	17	0,256430	0,256431

Рис. 1.9 – Таблиця розрахунків за методом ітерацій

За допомогою панелі «Елементи управління» впроваджуємо об'єкт «Кнопка» (CommandButton1), у вікні «Properties» в рядку «Caption» вводимо найменування «Метод половинного ділення» (рис. 1.10):

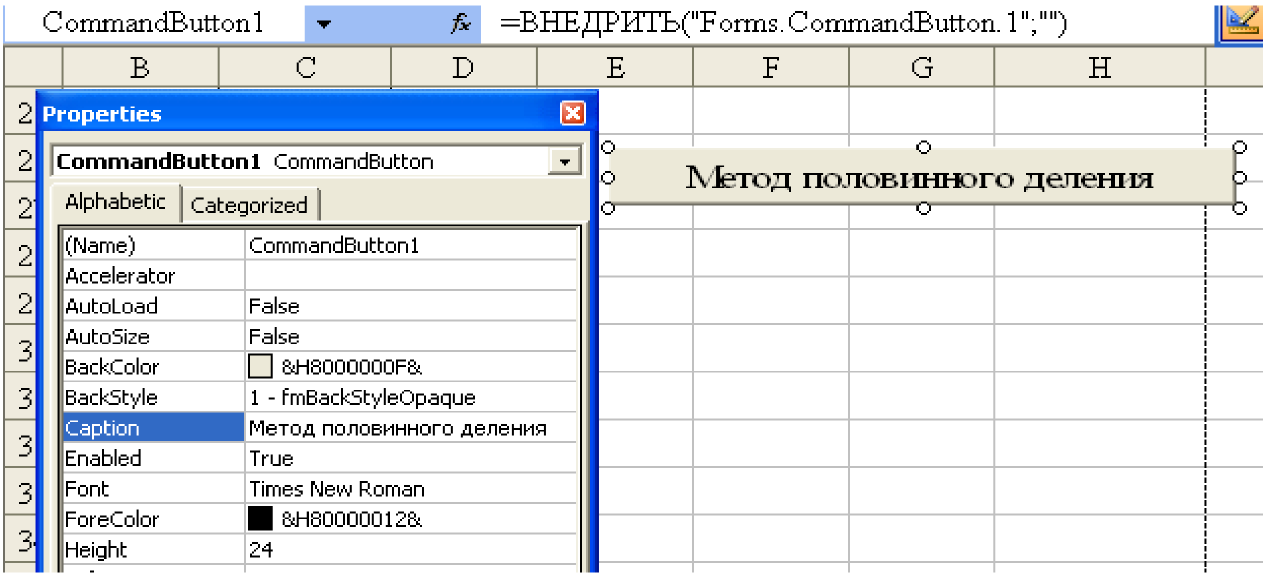


Рис. 1.10 – Впровадження об'єкта «Кнопка»

Двічі натиснемо на кнопку і записуємо текст процедури, яка реалізує обраний метод:

Текст коду	*Коментар (не вводиться)*
Private Sub CommandButton1_Click()	Оголошена процедура
Dim f(1000)	даний масив для значень функції
n = 0.1	даний крок розбиття
i = 0	
E = 0.00001	дана похибка ε
j = 20	даний лічильник рядків
For x = 0 To 3 Step n	відкритий цикл для обчислення
i = i + 1	лічильник циклу
f(i)= x - Log(2 * x + 3)+ 1	обчислення функції
If i > 1 And f(i)* f(i - 1)< 0 Then	перевірка якщо сусідні значення
j = j + 1	функції різних знаків, то починає
x1 = x - n	роботу обраний метод: визначаються
x2 = x	$x_{i-1} \to x1$,
L = n	$x_i \to x2$
k = 0	початкове значення L, підключається
While L > E	лічильник виконаних кроків
k = k + 1	починає працювати метод поки L>ε
xc = (x1 + x2) / 2	
fc = xc - Log(2 * xc + 3)+ 1	обчислюється x_C и $f(x_C)$
If f(i)* fc < 0 Then	
x1 = xc	якщо нерівність виконується
Else	$x_{i-1} \to x_C$
x2 = xc	інакше
End If	$x_i \to x_C$
L =abs(x2 - x1)	перераховується значення L
Wend	кінець внутрішнього циклу
jj = Trim(Str(j))	виведення кореня в чарунку h21
Worksheets(2).Range("h" + jj).Value = xc	виведення числа кроків у чарунку i21
Worksheets(2).Range("i" + jj).Value = k	кінець зовнішнього циклу
End If	кінець процедури
Next	наступний цикл
End Sub	

При натисненні кнопки (подія Click) процедура визначить корінь рівняння: $x_C = 0{,}256427$, число кроків – 14.

Метод хорд. Упроваджується ще одна кнопка. Текст процедури має вигляд:

```
Private Sub CommandButton2_Click()
Dim f(1000)
n = 0.1
i = 0
E = 0.00001
j = 21
For x = 0 To 3 Step n
i = i + 1
f(i) = x - Sqr(Log(x + 2))
If i > 1 And f(i) * f(i - 1) < 0 Then
j = j + 1
x1 = x - n
x2 = x
f1 = f(i - 1)
f2 = f(i)
L = n
k = 0
Do While L > E
k = k + 1
If f2 <> f1 Then
xc = x1 - (x2 - x1) * f1 / (f2 - f1)
fc = xc - Sqr(Log(xc + 2))
If f2 * fc < 0 Then
x1 = xc
f1 = fc
Else
x2 = xc
f2 = fc
End If
L = x2 - x1
Else
Exit Do
End If
Loop
jj = Trim(Str(j))
Worksheets(1).Range("h" + jj).Value = xc
Worksheets(1).Range("i" + jj).Value = k
End If
Next
End Sub
```

Результати виконання процедур, що реалізують розібрані методи, подано на рис. 1.11:

	корень	число итераций
Метод половинного деления	0,256427002	14
Метод хорд	0,256431209	8
Метод итераций	0,256430421	17

Метод половинного деления

Метод хорд

Рис. 1.11 – Результати виконання роботи

1.3. Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити графічно корені рівняння і уточнити один з них методом хорд з точністю до 0.001.

Відповідь: x_C = 0,75

2. Визначити корінь рівняння $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.5 = 0$ методом хорд з точністю до 0,001.

Відповідь: x_C = -0,96

3. Визначити корені рівняння $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$ методом половинного ділення відрізка з використанням MS Excel.

Відповідь: x_1 = -1,935; x_2 =1,463; x_3 =2,473

Визначити коріння рівнянь, представлених нижче, використовуючи метод половинного ділення відрізка і метод хорд:

5. $5^x - 6x - 3 = 0$ відповідь: x_1 = -0,41446; x_2 =1,563324

6. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ відповідь: x_1 = - 1,73205; x_2=1,73205

7. $2\cos(x + \pi / 6) + x^2 = 3x - 2$ відповідь: x_1 = 1,0,3181; x_2 =2,9607

8. $x^2 \log_{0,5}(x + 1) = 1$ відповідь: x_C = - 0,7288

9. Методом Ньютона обчислити корінь рівняння $e^x(2-x)-0.5=0$ на відрізку [1.5; 2.5] з точністю ε=0,001.

Відповідь: x_C =1,927

10. Визначити корінь рівняння $2x+\lg(2x+3)=1$ методом ітерацій.

Відповідь: x_C =0,23

11. Рівняння, що визначає власні значення p_K консолі має вигляд

$$\cos(pL)\cdot ch(pL)+1=0,$$

тут chx – косінус гіперболічний, L – параметр.

Знайти перші чотири корені рівняння, коли $L=1$.

Відповідь: : p_1 = 1,875; p_2 =4,694 p_3 = 7,855 p_4 = 10,996

1.4. Питання до теми

1. Які етапи розв'язання рівняння з однією невідомою чисельними методами?
2. Які існують методи розв'язання рівняння з однією невідомою?
3. Суть методу половинного ділення відрізка. Графічна інтерпретація методу.
4. Суть методу хорд. Графічна інтерпретація методу.
5. Суть методу дотичних. Графічна інтерпретація методу.
6. Суть методу простої ітерації.
7. Яке рівняння можна розв'язувати методом простої ітерації?
8. Які достатні умови збіжності методу простої ітерації при розв'язуванні рівняння $x = f(x)$ на відрізку $[a,b]$, що містить корінь?
9. Як будують ітераційну послідовність точок при розв'язуванні рівняння методом простої ітерації?

2. Апроксимація функцій

Методи апроксимації (наближення) функцій широко застосовують при вирішенні багатьох інженерних задач. Нехай дана основна система функцій $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)\}$, які надалі вважаємо такими, що безперервно диференціюються. Функція

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_m\varphi_m(x)$$

називається узагальненим многочленом або поліномом. Коефіцієнти a_i, де $i \in \overline{0, m}$ є константами.

Розглянемо деяку функцію $f(x)$. Задачу про наближення можна сформулювати так: дану функцію $f(x)$ потрібно приблизно замінити (апроксимувати) узагальненим поліномом так, щоб відхилення функції від полінома на заданій множині було найменшим. Це досягається шляхом підбору постійних коефіцієнтів. Отриманий поліном називають таким, що апроксимує.

На практиці найчастіше використовують наступні види апроксимуючих функцій: Многочлен алгебраїчний ступеня n

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n. \tag{2.1}$$

Многочлен мають очевидну перевагу – вони прості, їх легко обчислювати, складати, віднімати, множити, диференціювати, інтегрувати.

1. Тригонометричний ряд:

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2.2}$$

Апроксимація тригонометричним рядом особливо зручна в тих випадках, коли апроксимуюча функція f(x) періодична.

2. Дробово-раціональна функція

$$F(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}, \quad m \ge 1, n \ge 1 \tag{2.3}$$

Цю функцію часто використовують для апроксимації результатів досліджень, отриманих статистичним шляхом.

На практиці для апроксимації функцій найчастіше використовують методи інтерполяції і найменших квадратів.

2.1. Інтерполяція функцій

Задача інтерполяції полягає в тому, щоб побудувати деяку аналітичну функцію F(x), яка збігається із значеннями таблично заданої функції f(x)

$$F(x_i) = f(x_i) = y_i \text{ де } i \in \overline{0,n} \tag{2.4}$$

Розглянемо задачу інтерполяції для функції однієї змінної. Нехай на відрізку $[a,b]$ задана функція $y = f(x)$ з її n+1 значеннями $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$ у точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. Необхідно знайти таке аналітичне вираження $F(x)$, щоб у цих точках виконувалася умова

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1\ \ldots,\ F(x_n) = y_n.$$

Геометрично задача інтерполяції для функції однієї змінної означає, що необхідно знайти деяку криву $F(x)$, яка проходила б через точки з координатами $(x_i, y_i)(i = 0,1,2,...,n)$. З рис. 2.1 видно, що в такій постановці задача може мати нескінченну безліч розв’язків.

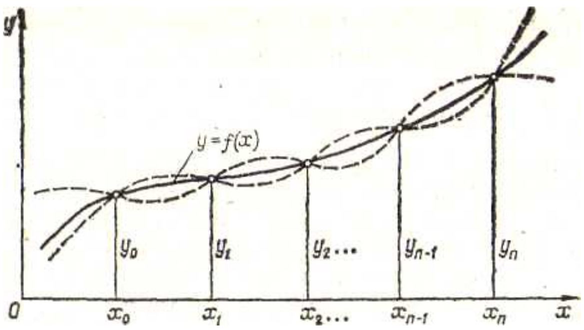


Рис. 2.1 – Безліч розв’язків задачі інтерполяції

Щоб уникнути такої невизначеності, прийнято наступне.

Для функції $f(x)$ заданої n+1 значеннями, побудують один єдиний інтерполяційний поліном $F_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ступінь якого не вище n, причому $F_n(x_0) = y_0, F_n(x_1) = y_1, ..., F_n(x_n) = y_n$. Поліном $F_n(x)$, який виконує ці вимоги, називають *інтерполяційним*, точки $x_0, x_1, ..., x_n$ - *вузлами інтерполяції*, а інтерполяцію за допомогою алгебраїчних поліномів – *параболічною інтерполяцією*.

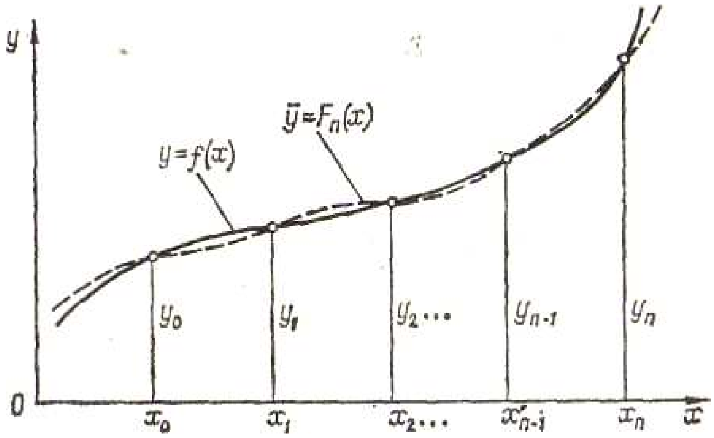


Рис. 2.2 – Параболічна інтерполяція

Геометричний зміст параболічної інтерполяції полягає в тому, щоб графік функції $y = f(x)$ (рис.2.2) замінити графіком полінома $\tilde{y} = F_n(x)$ ступеня n, причому ці два графіки мають n+1 спільну точку. Отже інтерполяційний поліном – це наближене аналітичне вираження даної функції; воно застосовується для обчислення значень функції, яких немає в таблиці, а також для операцій диференціювання, інтегрування і інше.

Лінійна інтерполяція. Найбільш простою є лінійна інтерполяція. У цьому випадку для функції $f(x)$, яка задана в точках $f(x_0) = y_0$ і $f(x_1) = y_1$ інтерполяційний поліном записують у вигляді лінійної функції $F_1(x) = a_0 + a_1 x$.

Невідомі коефіцієнти a_0 і a_1 полінома $F_1(x)$ визначають, із системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 \end{aligned}, \tag{2.5}$$

складеної при умові, що значення даної функції $f(x)$ дорівнює значенням апроксимуючої функції $F_1(x)$ у вузлах інтерполяції.

Розв’язуємо систему (2.5). Підставляємо знайдені коефіцієнти a_0 і a_1 у вираз для $F_1(x)$. Після нескладних перетворень функції $F_1(x)$ отримаємо наступний наближений вираз:

$$f(x) \approx F_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1. \qquad (2.6)$$

Лінійні функції у системі (2.5) називають *функціями форми* або *інтерполяційними функціями*, які позначають $N_i^{(n)}$, де i - номер вузла, для якого її записують; n - порядок інтерполяційного полінома. Вираз (2.6) містить такі інтерполяційні функції:

$$N_0^{(1)} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}; N_1^{(1)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \qquad (2.7)$$

Його можна представити у матричному вигляді:

$$f(x) \approx N_0^{(1)} y_0 + N_1^{(1)} y_1 = [N]\{y\}, \qquad (2.8)$$

де - $[N] = \left[N_0^{(1)} N_1^{(1)} \right]$ матриця-рядок; $\{y\} = \{y_0 y_1\}^T$ - вектор-стовпець, Т- знак транспонуванням матриці. Отже з (2.7) прямує, що функція $N_0^{(1)} = 1$ у вузлі з номером 0 і $N_0^{(1)} = 0$ у вузлі з номером 1, а функція $N_1^{(1)} = 1$ у вузлі з номером 1 і $N_1^{(1)} = 0$ у вузлі з номером 0. Ці значення є характерними для інтерполяційної функції. Вони дорівнюють одиниці в одному певному вузлі і нулю в усіх інших вузлах.

У спільному випадку $N_i^{(n)} = 1$ для i - го вузла і $N_i^{(n)} = 0$ для j - го вузла і, навпаки, $N_j^{(n)} = 0$ для i- го вузла і $N_j^{(n)} = 1$ для j - го вузла.

Квадратична інтерполяція. При квадратичній інтерполяції початкову функцію $f(x)$ замінюють параболою, яка проходить через три точки з координатами $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$. У цьому випадку інтерполяційний поліном записують у вигляді

$$F_2(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2. \qquad (2.9)$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 полінома $F_2(x)$ визначають із системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2, \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2, \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Ця система складена за умови, що значення даної функції $f(x)$ дорівнюють значенням апроксимуючої функції $F_2(x)$ у вузлах інтерполяції.

За аналогією з лінійною інтерполяцією наближений вираз функції $f(x)$ при квадратичній інтерполяції можна записати через інтерполяційні функції

$$f(x) \approx F_2(x) = N_0^{(2)} y_0 + N_1^{(2)} y_1 + N_2^{(2)} y_2 = \left[N\right]\left\{y\right\}, \qquad (2.11)$$

де - $\left[N\right] = \left[N_0^{(2)} N_1^{(2)} N_2^{(2)}\right]$ матриця-рядок; $\left\{y\right\} = \left\{y_0, y_1, y_2\right\}^T$ - вектор-стовпець, Т- знак транспонуванням матриці;

$$\begin{aligned} N_0^{(2)} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)} = \begin{cases} 1^*, x = x_0 \\ 0, x \neq x_0; \end{cases} \\ N_1^{(2)} &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \begin{cases} 1, x = x_1 \\ 0, x \neq x_1; \end{cases} \\ N_2^{(2)} &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \begin{cases} 1, x = x_2 \\ 0, x \neq x_2. \end{cases} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Інтерполяційні функції $N_i^{(2)}(i = 0,1,2)$ у виразі (2.11) дають можливість обчислити значення функції $f(\tilde{x})$ в проміжних точках $x_{i-1} \le \tilde{x} \le x_i$, для цього в інтерполяційну функцію замість x підставляють значення $\tilde{x}$ і обчислюють відповідне значення $y(\tilde{x})$.

Інтерполяційна формула Лагранжа. Розглянемо побудову інтерполяційної формули в надзвичайнішому випадку, коли інтерполяційна функція $f(x)$ задана її значеннями в $n+1$ вузлах інтерполяції: $f(x_i) = y_i, (i = 0.1, 2, ..., n)$. За інтерполяційну функцію візьмемо многочлен степеня n:

$$F_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \qquad (2.13)$$

причому в точках (рис.2.3)

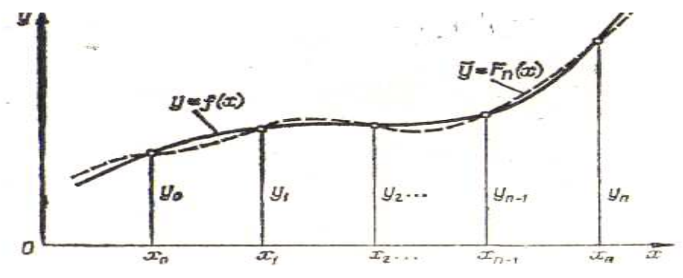


Рис. 2.3 – Інтерполяція многочлена степеня n

З умови (2.13) можна скласти систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n, \\
&y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Головний визначник системи називається визначником Вандермонда.

Розв'яжемо систему (2.14) відносно коефіцієнтів $a_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ і підставимо їх у вираз (2.13), внаслідок чого отримаємо інтерполяційний многочлен степеня n, який за аналогією з лінійною і квадратичною інтерполяціями можна представити у вигляді

$$F_n(x) = N_0^{(n)} y_0 + N_1^{(n)} y_1 + N_2^{(n)} y_2 + \ldots + N_n^{(n)} y_n, \tag{2.15}$$

де $N_i^{(n)} (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ - інтерполяційні функції, які дорівнюють одиниці у вузлах інтерполяції і нулю в останніх вузлах:

$$N_i^{(n)} = \begin{cases} 1, x = x_{i,} \\ 0, x \neq x_{i.} \end{cases}$$

Легко встановити, що інтерполяційні функції, які задовольняють цим умовам, матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
&N_0^{(n)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}; \\
&N_1^{(n)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}; \quad . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&N_n^{(n)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Многочлен $F_n(x)$ степеня -n запишемо у вигляді

$$y(x) \approx F_n(x) = N_0^{(n)} y_0 + N_1^{(n)} y_1 + \ldots + N_n^{(n)} y_n = [N]\{y\} \tag{2.17}$$

або

$$y \approx F_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} f(x_i) \tag{2.18}$$

Вираз (2.18) називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа*. Він дає можливість знайти апроксимуючі функції $F_k(x)$ при будь-яких $k \le n$. При $k=1$ отримуємо лінійну інтерполяцію, а при $k=2$ - квадратичну.

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції $f(x)=3^x$ у точках $x_0=-1, x_1=0, x_2=1$. Тут $f(x_0)=\frac{1}{3}; f(x_1)=1; f(x_2)=3$

Розв'язання Вважаємо $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. Тоді система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_0-a_1+a_2=1/3 \\ a_0=1 \\ a_0+a_1+a_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_0=1 \\ a_1=4/3 \\ a_2=2/3 \end{matrix} \Rightarrow 3^x=1+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}x^2 \Rightarrow \sqrt{3}=1{,}8$$

Запишемо многочлен Лагранжа

$$L_2(x)=\frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\cdot\frac{1}{3}+\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}\cdot1+\frac{x(x+1)}{(1+1)(1-0)}\cdot3=1+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}x^2$$

Якщо $n>m$, тобто число вузлів інтерполяції перевищує степінь многочлена, то задача не має розв'язання.

На рис. 2.4 наведено результат апроксимації.

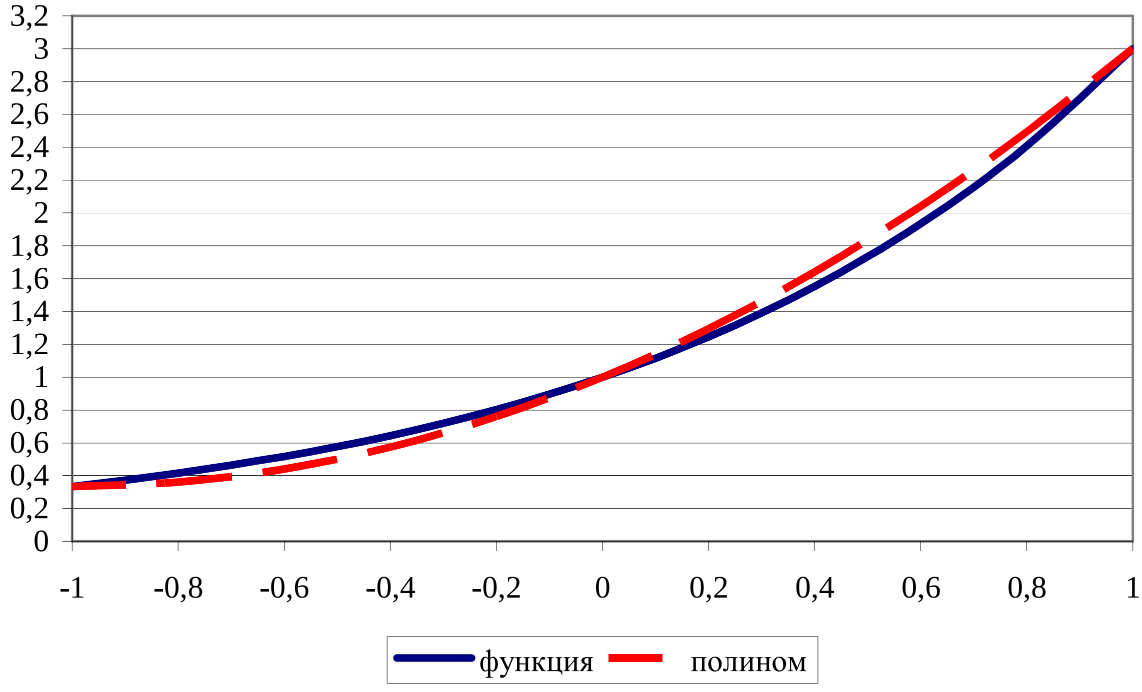


Рис. 2.4 – Апроксимація функції $y=f(x)=3^x$

У табл.. 2.1 наведено результати обчислення функції у проміжних точках інтервалу і визначена похибка апроксимації.

Таблиця 2.1 – Результати обчислення

x	функція	поліном	відхилення
-1	0,333333	0,333333	0,0000
-0,8	0,415244	0,36	0,0552
-0,6	0,517282	0,44	0,0773
-0,4	0,644394	0,573333	0,0711
-0,2	0,802742	0,76	0,0427
0	1	1	0,0000
0,2	1,245731	1,293333	0,0476
0,4	1,551846	1,64	0,0882
0,6	1,933182	2,04	0,1068
0,8	2,408225	2,493333	0,0851
1	3	3	0,0000
		похибка	5,2183%

2.2. Метод найменших квадратів

Якщо кількість експериментальних даних достатньо велика, то степінь многочлена буде висока, що ускладнює обчислення. У цих випадках використовують метод, який дає можливість побудувати апроксимуючу функцію значно простіше, ніж, наприклад, поліном Лагранжа. Але ця апроксимуюча функція не даватиме точних значень у вузлах інтерполяції, хоча буде досить «близькою» до них. Цю функцію знаходять за методом найменших квадратів.

Метод найменших квадратів отримав цю назву тому, що сума квадратів різниці між значеннями початкової функції $y_i = f(x_i)$, заданим в точках $x_i (i = 0,1,2,...,n)$, і апроксимуючої функції $y_i = F(x_i)$ в цих же точках має бути мінімальною. Умова мінімальності має вигляд

$$S = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2 \to \min . \qquad (2.19)$$

Тут S – шукана сума.

Наближення функції у вигляді (2.19) називають ***квадратичним***.

Припустимо, що функція $F(x)$ дана у вигляді лінійної комбінації m відомих функцій:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_m\varphi_m(x)\,. \quad (2.20)$$

Функції $\varphi_j(x)$ називають *базисними*, а їх лінійну комбінацію – *лінійною математичною моделлю*. Модель лінійна тому, що невідомі коефіцієнти $a_j\,(j = 0,1,2,...,m)$ мають першу ступінь.

Задача побудови апроксимуючої функції $F(x)$ зводиться до визначення коефіцієнтів $a_i = (i = 0,1,2,...,m)$, які мають бути такими, щоб математична модель відповідала умові (2.19).

Існує багато різних методів визначення коефіцієнтів a_i, які дають мінімальну суму квадратів відхилень. Один з них – метод знаходження мінімуму функції багатьох змінних. Необхідною умовою існування мінімуму є рівність кожної частинної похідної від функції по шуканих коефіцієнтах $a_i(i = 0,1,2,...,m)$.

Отже умова мінімуму S буде виконана тоді, коли

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, ..., \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (2.21)$$

Підставимо (2.21) в (2.19), отримаємо:

$$S = \sum_{i=0}^{n}[y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]^2 = \min\,. \quad (2.22)$$

Обчислимо частинні похідні по коефіцієнтах $a_i(i = 0,1,2,...,m-1)$: і отримаємо систему рівнянь з m невідомими

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}[y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]\varphi_0(x_i) = 0\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}[y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]\varphi_1(x_i) = 0, \quad (2.23)$$

....

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n}[y_i - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_m\varphi_m(x_i))]\varphi_m(x_i) = 0.$$

Перепишемо її у вигляді

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_k(x_i) y_i. \qquad (2.24)$$

Зручною формою запису цієї системи є:

$$\sum_{j=1}^{m+1} b_{kj} a_j = c_k (k = 1, 2, ..., m), \qquad (2.25)$$

де a_j - невідомі в системі рівнянь; b_{kj} = $\sum_{i=1}^{n=1} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$ - коефіцієнти системи; $c_k = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_k(x_i) y_i$ - вільні члени системи.

Систему рівнянь (2.25) називають *нормальною*. Її коефіцієнти b_{kj} залежать тільки від базисних функцій, а функції y_i входять тільки в праву частин.

Розглянемо окремі випадки.

Лінійна апроксимація. Хай $F(x) = a_0 + a_1 x$.

Тоді $S = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i)]^2$. Мінімум функції двох змінних відносно коефіцієнтів a_0, a_1 досягається при виконанні умов:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i)] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i - y_i] x_i = 0$$

Рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \qquad (2.26)$$

З цієї системи рівнянь визначаємо невідомі коефіцієнти a_0 і a_1.

Приклад. Функція подана у перших двох стовпчиках табл. 2.2, у третьому й четвертому стовпчику розміщені обчислені величини.

Таблиця 2.2 – Числова інформація для обчислення коефіцієнтів системи (2.26)

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	0,100	0,333	0,010	0,033
	0,300	0,415	0,090	0,125
	0,600	0,517	0,360	0,310
	0,800	0,644	0,640	0,516
	1,000	0,803	1,000	0,803
	1,200	1,000	1,440	1,200
	1,400	1,246	1,960	1,744
$\sum$	**5,400**	**4,959**	**5,500**	**4,731**

В останньому рядку розташовані відповідні суми $\sum x_i \ \sum y_i \ \sum x_i^2 \ \sum x_i y_i$

Отже систему рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 7a_0 + 5{,}4a_1 = 4.959 \\ 5{,}4a_0 + 5{,}5a_1 = 4{,}731 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 0{,}185 \\ a_1 = 0{,}6785 \end{matrix},$$

Таким чином, таблична функція замінюється прямою $F(x) = 0{,}185 + 0{,}6785x$.

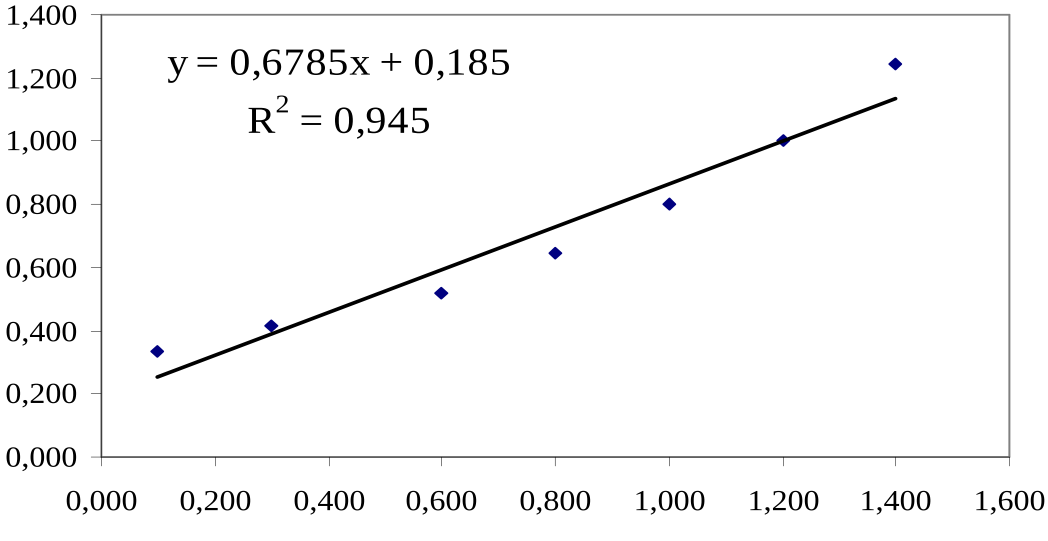


Рис. 2.5 – Лінійна апроксимація

Середню похибку апроксимації визначаємо за формулою

$$E = \frac{100\%}{n} \sum \left| \frac{F(x_i) - y_i}{F(x_i)} \right| \qquad (2.27)$$

Для попередньої оцінки апроксимації функції, заданої таблично, за методом найменших квадратів використовують коефіцієнт кореляції (детермінації) R2 . Алгоритм обчислення наступний:

1. Знаходять середнє значення y_i за формулою: $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$; у даному прикладі $\bar{y} = 0{,}708389$.
2. Обчислюють суму квадратів відхилень значень функції $F(x_i)$ в точках x_i від середнього $\sum[F(x_i) - \bar{y}]^2$; у даному прикладі $\sum = 0{,}708389$.
3. Обчислюють суму квадратів відхилень вихідних значень y_i функції в точках x_i від середнього $\sum[y_i - \bar{y}]^2$; у даному прикладі $\sum = 0{,}649894$,
4. Обчислюють коефіцієнт кореляції (детермінації) за формулою

$$R^2 = \frac{\sum[y(x_i) - \bar{y}]^2}{\sum[y_i - \bar{y}]^2}. \tag{2.28}$$

У даному прикладі $R^2 = \frac{0{,}614174}{0{,}649894} = 0{,}945037$.

Значення коефіцієнта кореляції змінюється від 0 до 1. Чим ближче до одиниці, тим точніше результати відповідної апроксимації.

Результати обчислення середньої помилки і коефіцієнта кореляції подані у табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Обчислення середньої помилки і відповідних сум

№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$F(x_i)$	E_i	$[F(x_i) - \bar{y}]^2$	$[y_i - \bar{y}]^2$
1	0,100	0,333	0,010	0,033	0,252855	0,318277	0,20751155	0,140667
2	0,300	0,415	0,090	0,125	0,388546	0,068712	0,10229972	0,085934
3	0,600	0,517	0,360	0,310	0,592083	0,126335	0,01352724	0,036522
4	0,800	0,644	0,640	0,516	0,727774	0,114568	0,00037576	0,004095
5	1,000	0,803	1,000	0,803	0,863465	0,070325	0,02404842	0,008902
6	1,200	1,000	1,440	1,200	0,999156	0,000845	0,08454522	0,085037
7	1,400	1,246	1,960	1,744	1,134847	0,097708	0,18186617	0,288736
$\sum$	**5,400**	**4,959**	**5,500**	**4,731**			0,61417407	0,649894
	середнє	0,708389			помилка	11,4%		0,945037

Многочлен другого степеня: $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Тоді $S = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2 - y_i]^2$. Мінімум функції трьох змінних досягається при виконанні необхідних умов:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} - y_i] = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2 - y_i] x_i = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} - y_i] x^2{}_i = 0$$

Звідки маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими коефіцієнтами a_0 a_1 a_2 другого степеня:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^{\ 2}{}_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x^2{}_i + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x^2{}_i y_i \end{cases} \tag{2.29}$$

Приклад. Функцію подано у перших двох стовпчиках табл.. 2.2. У наступних стовпчиках подані відповідні обчислені величини.

Таблиця 2.4 – Обчислення коефіцієнтів a_0 a_1 і a_2 системи рівнянь (2.29)

№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
1	0,100	0,333	0,010	0,033	0,001	0,0001	0,00333333
2	0,300	0,415	0,090	0,125	0,027	0,0081	0,03737196
3	0,600	0,517	0,360	0,310	0,216	0,1296	0,18622152
4	0,800	0,644	0,640	0,516	0,512	0,4096	0,41241216
5	1,000	0,803	1,000	0,803	1,000	1,000	0,802742
6	1,200	1,000	1,440	1,200	1,728	2,0736	1,440000
7	1,400	1,246	1,960	1,744	2,744	3,8416	2,44163276
$\sum$	**5,400**	**4,959**	**5,500**	**4,731**	**6,228**	**7,463**	**5,324**

В останньому рядку дані відповідні суми. Одержана числова інформація дає можливість скласти відповідну система рівнянь:

$$\begin{cases} 7a_0 + 5{,}4a_1 + 5{,}5a_2 = 4{,}9587, \\ 5{,}4a_0 + 5{,}5a_1 + 6{,}228a_2 = 4{,}731, \\ 5{,}5a_0 + 6{,}228a_1 + 7{,}463a_2 = 5{,}324. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо $a_0 = 0{,}3407; a_1 = 0{,}0384; a_2 = 0{,}4302$.

Отже шуканий многочлен прийме вигляд: $y = 0,4302x^2 + 0,0384x + 0,3407$. На рис. 2.6 графічно зображена таблична (окремі точки) і квадратична функція. Коефіцієнт кореляції обчислено за формулою (2.28).

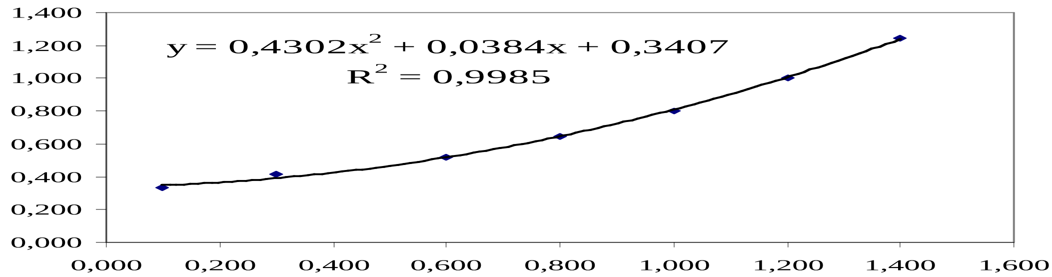


Рис. 2.6 – Апроксимація табличної функції многочленом другого степеня

Середня похибка апроксимації тут склала тільки 2%, а коефіцієнт кореляції (детермінації) R2 практично дорівнює одиниці. Таким чином, многочлен другого ступеня є кращим наближенням функції даної таблично.

Степенева функція $y = ax^b$.

Візьмемо натуральний логарифм від обох частин рівняння.

Тоді $\ln y = \ln a + b \ln x$. Позначимо: $Y = \ln y,\ X = \ln x.$ Отже, $Y = A + bX,$ де $A = \ln a$

Отже маємо лінійну апроксимацію, тобто можна провести дослідження відповідно до поданої вище методики, але величини x_i, y_i треба замінити на $X_i = \ln x_i, Y_i = \ln y_i$. Функцію подано у перших двох стовпчиках табл.. 2.2.

Приклад. Результати обчислення коефіцієнтів системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими наведені у таблиці 2.5.

Таблиця 2.5 – Обчислення коефіцієнтів системи

№ п/п	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i^2 Y_i$
1	0,100	0,333	-2,303	-1,099	5,301898	2,529651
2	0,300	0,415	-1,204	-0,879	1,449551	1,058158
3	0,600	0,517	-0,511	-0,659	0,260943	0,336719
4	0,800	0,644	-0,223	-0,439	0,049793	0,098059
5	1,000	0,803	0,000	-0,220	0	0
6	1,200	1,000	0,182	0,000	0,033241	0
7	1,400	1,246	0,336	0,220	0,113214	0,073931
$\sum$	**5,400**	**4,959**	**-3,722**	**-3,076**	**7,209**	**4,097**

За обчисленими коефіцієнтами складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7A - 3{,}722b = -3{,}076 \\ -3{,}722A + 7{,}209b = 4{,}097 \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи дає: $\begin{matrix} A = -0{,}18925 \\ b = 0{,}4706 \end{matrix}$ тут $a = e^A = 0.827$

Ця апроксимація значно гірше за попередні.

На рис. 2.7 наведемо графічне зображення результатів обчислення.

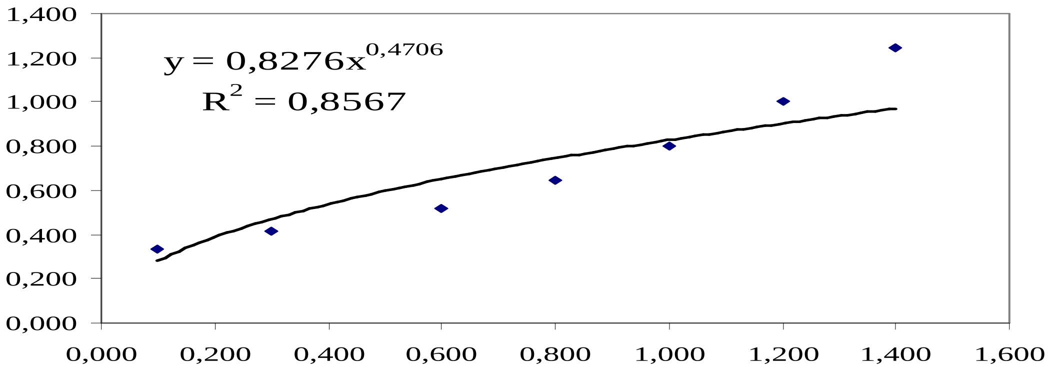


Рис. 2.7 – Апроксимація таблично заданої функції степеневою функцією

Експоненціальна функція $y = a \cdot e^{bx}$**.**

Візьмемо натуральний логарифм від обох частин рівняння. Тоді $\ln y = \ln a + xb$. Позначимо: $Y = \ln\ y$.*Тоді* $Y = A + bx$, де $A = \ln\ a$. Отже маємо лінійну апроксимацію, де x_i, y_i замінюємо на $X_i = x_i,\ Y_i = \ln y_i$

Приклад. Функцію подано у перших двох стовпчиках табл. 2.2. Результати обчислення коефіцієнтів системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими наведені у табл.. 2.6.

Таблиця 2.6 – Обчислення коефіцієнтів системи

№	x_i	y_i	Y_i	x_i^2	$x_i^2 Y_i$
1	0,100	0,333	-1,099	0,010	-0,10986
2	0,300	0,415	-0,879	0,090	-0,26367
3	0,600	0,517	-0,659	0,360	-0,3955
4	0,800	0,644	-0,439	0,640	-0,35156
5	1,000	0,803	-0,220	1,000	-0,21972
6	1,200	1,000	0,000	1,440	0
7	1,400	1,246	0,220	1,960	0,307612
$\sum$	**5,400**	**4,959**	**-3,076**	**5,500**	**-1,033**

За обчисленими коефіцієнтами складаємо систему рівнянь:

Тоді $\begin{cases} 7a_0 + 5{,}4a_1 = -3{,}076 \\ 5{,}4a_0 + 5{,}5a_1 = -1{,}033 \end{cases}$

Розв’язок цієї системи дає: $\begin{matrix} A = -1{,}21435 \\ b_1 = 1{,}0045 \end{matrix}$ т т $a = e^A = 0.2969$.

Ця апроксимація практично співпадає з апроксимацією даної таблично функції многочленом другого степеня

На рис. 2.8 наведено графічне зображення результатів обчислення.

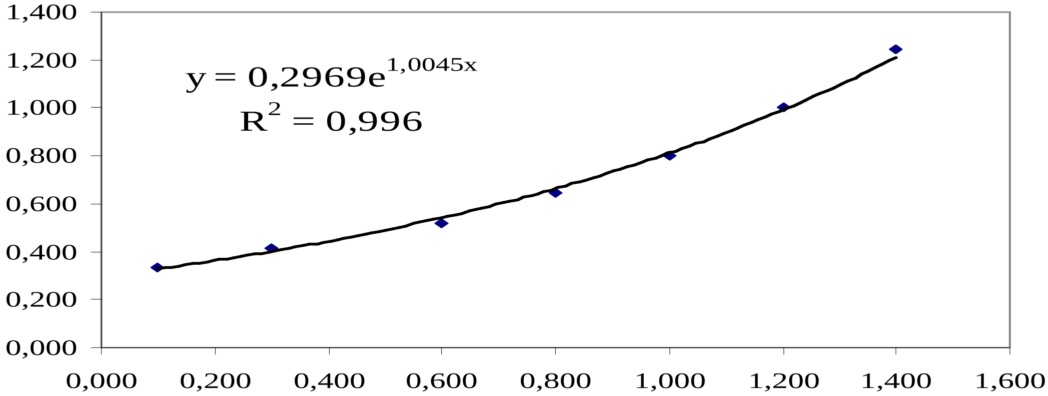


Рис. 2.8 – Апроксимація таблично заданої функції експоненціальною функцією

Логарифмічна функція $y = a + b\ln x$.

Позначимо $X = \ln x \Rightarrow y = A + bX$. Приходимо до випадку лінійної апроксимації, але в якості x_i використовуватимемо $X_i = \ln x_i$.

Приклад. Функцію подано у перших двох стовпчиках табл. 2.2.

Таблиця 2.7 – Обчислення коефіцієнтів системи

№ п/п	x_i	y_i	X_i	X_i^2	$X_i^2 y_i$
1	0,100	0,333	-2,303	5,302	-0,76753
2	0,300	0,415	-1,204	1,450	-0,49994
3	0,600	0,517	-0,511	0,261	-0,26424
4	0,800	0,644	-0,223	0,050	-0,14379
5	1,000	0,803	0,000	0,000	0
6	1,200	1,000	0,182	0,033	0,182322
7	1,400	1,246	0,336	0,113	0,419154
$\sum$	**5,400**	**4,959**	**-3,722**	**7,209**	**-1,074**

Результати обчислення коефіцієнтів системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими наведені у табл.. 2.7. За обчисленими коефіцієнтами складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7a_0 - 3{,}7226a_1 = 4{,}959 \\ -3{,}772a_0 + 7{,}209a_1 = -1{,}074 \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає: $\begin{matrix} a = 0{,}8672 \\ b = 0{,}2987 \end{matrix}$.

Ця апроксимація, у нашому прикладі дає найменшу величину коефіцієнта кореляції.

На рис. 2.9 наведено графічне зображення результатів обчислення.

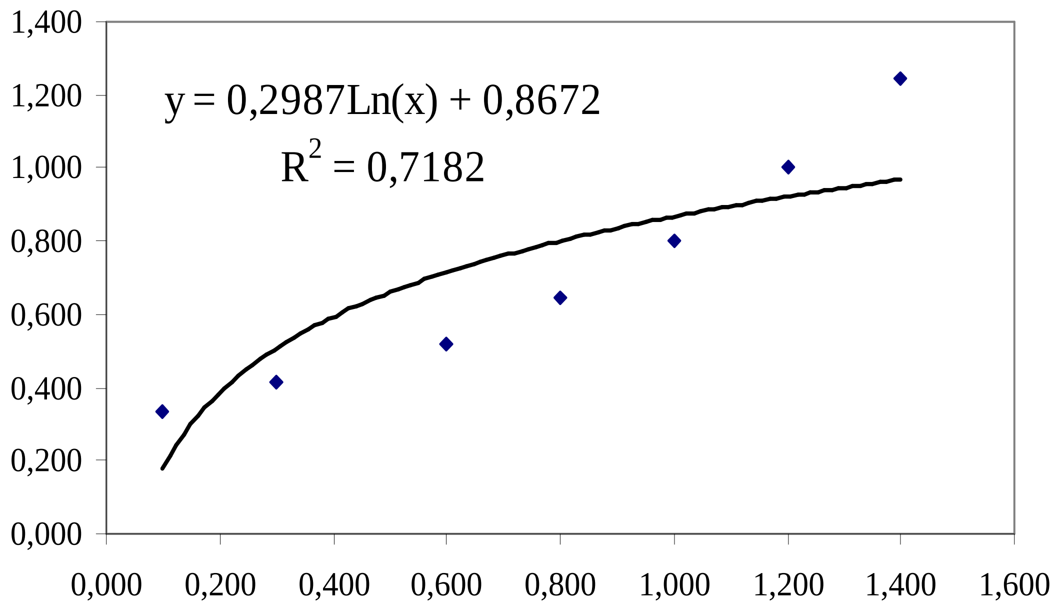


Рис. 2.9 – Апроксимація таблично заданої функції логарифмічною функцією

2.3. Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $y = f(x) = Ln(x)$ у точках $x_0 = 0,5; x_1 = 1; x_2 = 1,5$

2. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для таблично даної функції.

x_i	0.41	1.55	2.67	3.84
y_i	2.63	3.75	4.87	5.03

Відповідь: $F(x) = -0.112x^3 + 0.527x^2 + 0.309x + 2.422$

3. Функція, надана таблицею:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	4,2	3,6	2,6	1,8	1,4	0,8	0,6	0

Методом найменших квадратів знайти функцію $F(x) = a_1 x + a_0$, яка її апроксимує.

Відповідь: $F(x) = -1.1952x + 5,1619$

4. Функція, надана таблицею:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	8,9	4,6	2,6	1,5	1,2	0,8	0,6	0,5

Методом найменших квадратів знайти функцію $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, яка її апроксимує.

Відповідь: $F(x) = 15,159 - 8,206x + 1,1262x^2$

5. Функція, надана таблицею:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	10,8	5,8	3,2	2,2	1,5	0,9	0,6	0,5

Методом найменших квадратів знайти функцію $F(x) = ax^b$, яка її апроксимує.

Відповідь: $F(x) = 12,77x^{-2,0935}$

6. Функція, надана таблицею:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	10,8	5,8	3,2	2,2	1,5	0,9	0,6	0,5

Методом найменших квадратів знайти функцію $F(x) = ae^{bx}$, яка її апроксимує.

Відповідь: $F(x) = 21.613e^{-0.8819x}$

7. Функція, надана таблицею:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	1	2,1	3,6	4,8	6	6,7	7,2	8,6

Методом найменших квадратів знайти функцію $F(x) = a\ln x + b$, яка її апроксимує.

Відповідь: $F(x) = 5{,}0273\ln x + 0{,}4398$

8. Відомі показники товарообігу (ОТ) у млрд. грн. по регіонах України за попередні вісім років:

Рік	x_i	об'єм товарообігу (ОТ)
2000 р.	1,00	0,95
2001 р.	2,00	1,22
2002 р.	3,00	1,43
2003 р.	4,00	1,76
2004 р.	5,00	2,40
2005 р.	6,00	3,52
2006 р.	7,00	4,78
2007 р.	8,00	6,35

Знайти функцію (з розглянутих вище) для якої коефіцієнт кореляції (детермінації) буде найбільшим. За його допомогою зробити прогноз про обсяг товарообігу на 2008 р.

Відповідь: у $= 0{,}0087x^3 + 0{,}0101x^2 + 0{,}0437x + 0{,}9364$, $R2 = 0{,}9986$.

На 2008 р. прогноз ОТ дорівнюватиме 8,49 млрд. грн.

2.4. Розрахунково-графічна робота № 2

Функції $y = f(x)$ подані таблицею. Методом найменших квадратів знайти коефіцієнти функцій, які її апроксимують: лінійно, квадратично, степенево, логарифмічно. З них вибрати ту функцію, для якої коефіцієнт кореляції (детермінації) буде найбільшим. Для неї обчислити величину середньої похибки; побудувати її графік.

Варіанти	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	12	18	19	12,5	1,1
1,5	8,2	17	18	9,7	1,6
2	6,5	16	16	7	2,2
2,5	4,8	15	13	6	3,2
3	3,6	12	9	5,5	4,1
3,5	2,8	8	4	4,8	5,5
4	2,1	4	-2	4,2	7,3
4,5	1,7	1	-9	3,5	10,5
5	1,6	-2	-14	3	14
5,5	1,3	-6	-19	2,5	16,1
Варіанти	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	11,5	13,2	2,2	11,7	19,3
2	7,7	10,4	2,7	7,4	18,8
3	6	7,7	3,3	6,1	17,4
4	4,3	6,7	4,3	4,2	13,6
5	3,1	6,2	5,2	3,5	9,1
6	2,3	5,5	6,6	2,5	4,3
7	1,6	4,9	8,4	1,7	1
8	1,2	4,2	11,6	1,2	-5
9	1,1	3,7	15,1	1,1	-13
10	0,8	3,2	17,2	0,8	-20
Варіанти	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	10,2	10,9	1,3	-1,8	20
1,5	8	9	1,7	-1,3	19,5
2	6,6	7,7	2,3	-0,7	18,3
2,5	6	6,7	3,1	0,3	16,5
3	5,1	5,5	4	1,2	11
3,5	4,5	4,8	5,4	2,6	6

4	3,8	4,1	7,2	4,4	-1
4,5	3	3,6	10,4	7,6	-8
5	2,6	3,2	14,1	11,1	-14
5,5	2,2	3,1	16	13,2	-20
Варіанти	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	6	5,6	17,1	-6,9	11,8
2	3,9	6	13,3	-6,4	9,7
3	2,2	6,6	11,6	-5,8	8,3
4	0,5	7,4	9,9	-4,8	7,5
5	-0,7	8,3	8,7	-3,9	6,6
6	-1,5	9,7	7,9	-2,5	6
7	-2,2	11,5	7,2	-0,7	5,4
8	-2,6	14,7	6,8	2,5	4,6
9	-2,8	17,5	6,7	6	4,2
10	-3	20	6,4	8,1	4
Варіанти	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	16,4	5	8,4	15,2	5,4
1,5	15,4	5,5	4,1	12,4	1,6
2	14,4	6,1	2,8	9,7	-0,1
2,5	13,4	7,1	0,9	8,7	-1,8
3	10,4	8	0,2	8,2	-3
3,5	6,4	9,4	-0,8	7,5	-3,8
4	3	11,2	-1,6	6,9	-4,5
4,5	-2	14,4	-2,1	6,2	-4,9
5	-6,1	17,9	-2,2	5,7	-5
5,5	-10	20	-2,5	5,2	-5,3
Варіанти	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	7,8	-4,3	11	4,7	18,1
2	5	-3,8	10	5,2	14,3
3	2,3	-3,2	9	5,8	12,6
4	1,3	-2,2	8	6,8	10,9
5	0,8	-1,3	5	7,7	9,7
6	0,1	0,1	1	9,1	8,9
7	-0,5	1,9	-2,4	10,9	8,2
8	-1,2	5,1	-7,4	14,1	7,8
9	-1,7	8,6	-11,5	17,6	7,7
10	-2,2	10,7	-15,4	19,7	7,4

2.5. Питання до теми

1. Перелічити розглянуті апроксимуючі функції
2. Що таке інтерполяція?
3. Як побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа?
4. Спільна постановка задачі знаходження апроксимуючої функції.
5. У чому суть наближення таблично заданої функції за методом найменших квадратів?
6. Які функції можуть бути використані як апроксимуючі?
7. Як знаходяться відхилення відомих значень Y від обчислених за формулою функції, що апроксимує?
8. Як знайти апроксимуючу лінійно функцію?
9. Як знайти апроксимуючу многочленом другого степеня функцію?
10. Як показникову, степеневу і логарифмічну функції звести до лінійної?
11. Як обчислити коефіцієнт кореляції (детермінації)?
12. Як обчислити стандартну похибку?
13. Як можна визначити, що обрана функція дає кращу апроксимацію?
14. Як використовувати можливості MS Excel для підбору оптимальної апроксимуючої функції?

3. Наближене обчислення визначених інтегралів

Для обчислення визначеного інтеграла використовується формула Ньютона-Лейбніца, якщо його первісна є комбінацією елементарних функцій. Проте більшість визначених інтегралів, які пов'язані з розв'язанням практичних задач, такої можливості не мають. Наприклад, інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{x} \cdot \sin x dx$ у елементарних функціях не береться і його неможливо обчислити точно. Тому були розроблені чисельні методи, що дозволяють знаходити наближені значення визначених інтегралів.

Відомо, що визначений інтеграл $J = \int\limits_a^b f(x)dx$ від безперервної функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженою віссю Ox, прямими $x = a, x = b$ і кривою $y = f(x)$. Це твердження дозволило розробити чисельні методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

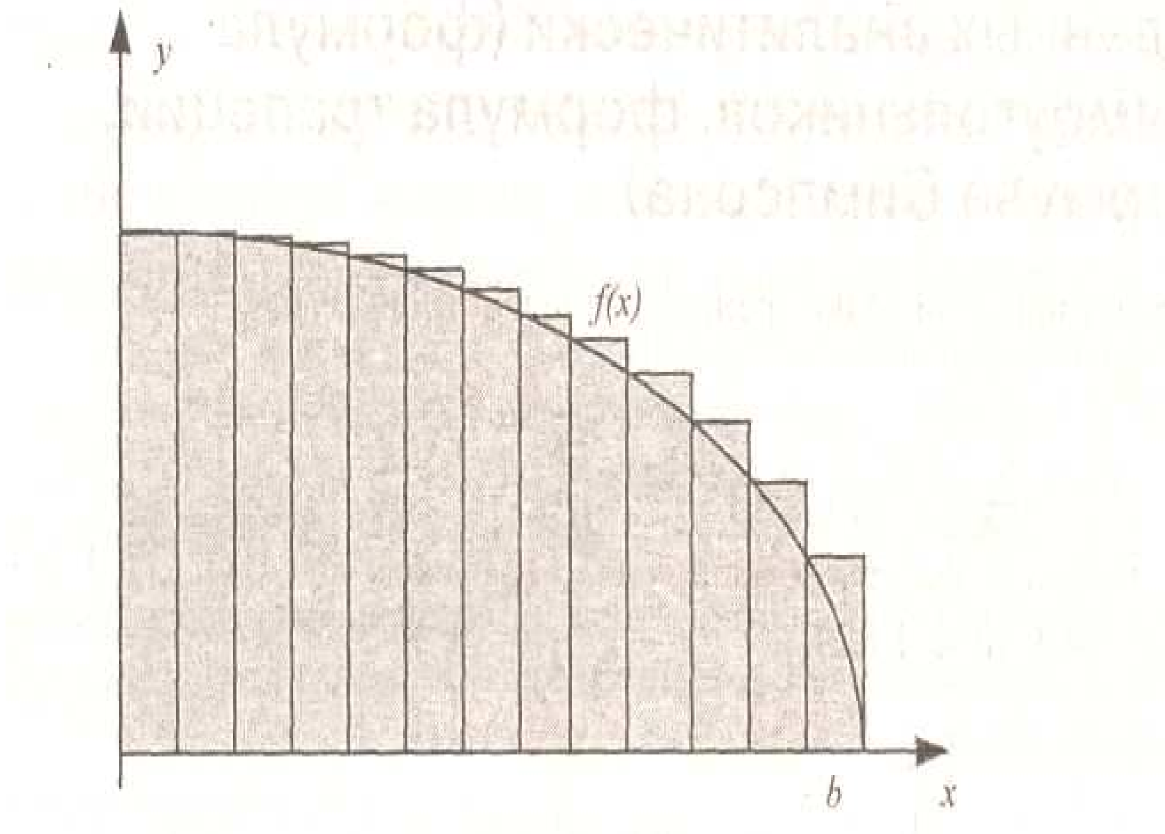


Рис. 3.1 – Розбиття площі криволінійної трапеції на прямокутники, що стоять ліворуч

3.1. Метод прямокутників

Метод реалізується таким чином. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n частин. Довжина однієї частини дорівнює $h = \dfrac{b-a}{n}$ її називають кроком.

Введемо позначення:

$y_0 = f(a), y_1 = f(a+h), y_2 = f(a+2h),...y_i = f(a+ih),...y_{n-1} = f(a+(n-1)h), y_n = f(a+nh) = f(b)$

Побудуємо прямокутники так, як показано на рис. 3.1. Обчислимо і складемо площі цих прямокутників за допомогою формули (3.1). Набуте число можна вважати за перше наближене значення даного визначеного інтеграла:

$$J_1 \approx S_{\Pi_1} = hy_0 + hy_1 + ...hy_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot h \qquad (3.1)$$

Побудуємо прямокутники так, як показано на рис. 3.2. Обчислимо і складемо площі цих прямокутників за допомогою формули (3.2). Здобуте число можна вважати за перше наближене значення даного визначеного інтеграла:

$$J_2 \approx S_{\Pi_2} = hy_1 + hy_1 + ...hy_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot h \qquad (3.2)$$

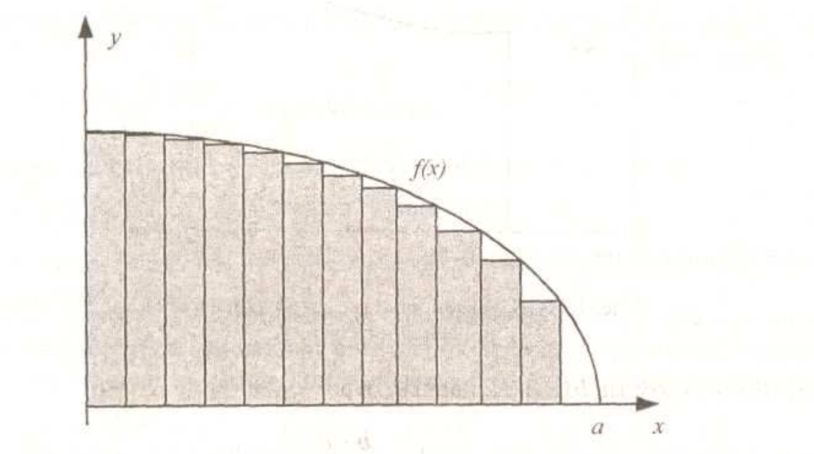


Рис. 3.2 – Розбиття площі криволінійної трапеції на прямокутники, що стоять праворуч

При збільшенні числа розбиття підвищується точність обчислень. Отже число J_1 дає шукану величину більшою, а число J_2 - меншою від справжньої площі фігури. $J = \dfrac{1}{2}(J_1 + J_2)$.

Визначимо похибку, яку дає цей методу. Для цього розкладемо у степеневий ряд функцію в околиці точки x_i:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)\cdot(x - x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)\cdot(x - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f''(x_i)\cdot(x - x_i)^3 + \frac{1}{4!} f''''(x_i)\cdot(x - x_i)^4 + \ldots$$

Тоді інтеграл на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ буде рівний

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong f(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2} f'(x_i)(\Delta x_i)^2 + \frac{1}{6} f''(x_i)(\Delta x_i)^3 + \frac{1}{24} f'''(x_i)(\Delta x_i)^4 + \frac{1}{120} f''''(x_i)(\Delta x_i)^5 + \ldots$$

Похибка на відрізку складе

$$\Delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)\Delta x_i = \frac{1}{2} f'(x_i)(\Delta x_i)^2 + \frac{1}{6} f''(x_i)(\Delta x_i)^3 + \ldots$$

Число відрізків розбиття дорівнює n. Тому повна похибка для методу прямокутників складе $M(b-a)h^2/2$, де $M = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

3.2. Метод трапецій

Після ділення відрізка $[a,b]$ на n частин побудуємо трапеції так, як показано на рис. 3.3, і обчислимо сумарну площу цих трапецій:

$$S_T = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \frac{y_2 + y_3}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h.$$

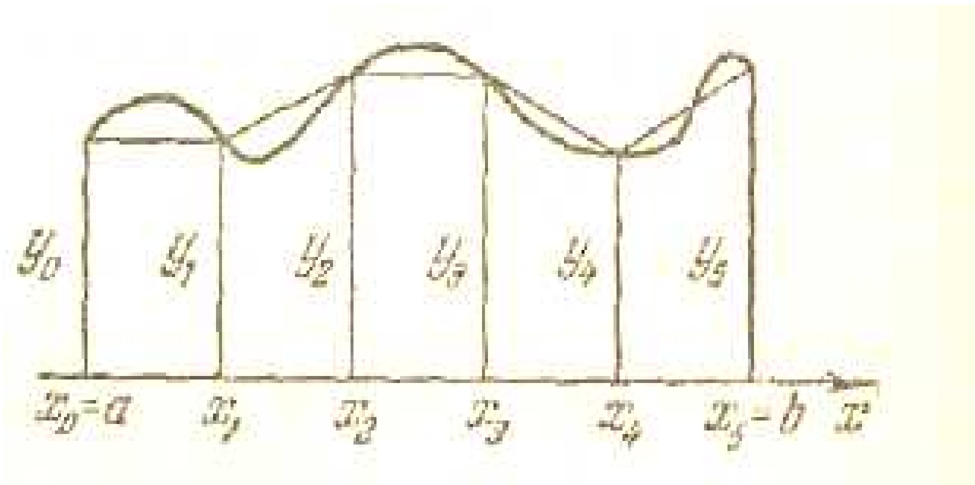


Рис. 3.3 – Метод трапецій

У результаті отримаємо наближену формулу для обчислення визначених інтегралів за методом трапецій:

$$J \approx S_T = h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right] = h \cdot \left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right] \quad (3.3)$$

Похибка цього методу на відрізку Δx складе

$$\Delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1}) \right] \Delta x_i = \frac{1}{12} f''(x_i)(\Delta x_i)^3$$

Число відрізків розбиття дорівнює n $\Delta x_i = h = (b-a)/n$. Повна похибка для методу трапецій складе $M(b-a)h^3/12$ де $M = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$

3.3. Метод парабол (Симпсона)

Припустимо, що парабола $Y = Ax^2 + Bx + C$, розглядається на відрізку *[-h; h]*. Обчислимо її значення у трьох точках відрізку: $Y(-h) = Ah^2 - Bh + C, \; Y(0) = C, \; Y(h) = Ah^2 + Bh + C$.

Звідси : $Y(-h) + Y(h) = 2Ah^2 + 2C$.

Обчислимо площу під параболою за допомогою визначеного інтегралу:

$$J_n = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]_{-h}^{h} = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch = \frac{h}{3} \cdot (2Ah^2 + 6C).$$

Нехай: $Y(-h)=y_0$, $Y(0)=y_1$, $Y(h)=y_2$, тоді з попереднього прямує

$$J_n = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (3.4).$$

Тобто це та сама площа, яка обмежена параболою, віссю Оx і вертикальними прямими $x = \pm h$.

Виберемо парне число n і зробимо розбиття відрізку $[a,b]$ на n частин. Довжина однієї частини дорівнює $h = \frac{b-a}{n}$. Назвемо цю величину кроком. Замінюємо на кожних трьох послідовних точках відрізку $[a,b]$ криву $y = f(x)$ параболами. Обчислимо суму площ під цими параболами, використовуючи формулу (3.4). Отримаємо формулу Сімпсона:

$$S_C = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \Rightarrow$$

Після її незначного перетворення остаточно маємо:

$$J \approx S_C = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + y_n + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})). \quad (3.5)$$

Повна похибка цього метода складе $\frac{M(b-a)h^4}{18}$, де $M = \max\limits_{[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл $J = \int\limits_1^e \ln\, x dx$.

Розв'язання. Використовуємо табличний процесор MS EXCEL. Спочатку визначимо n=10 частин і обчислимо крок, використовуючи формулу $h = \frac{e-1}{10}$. Для цього введемо формулу в чарунку B1: =(EXP(1)-1)/10

Потім створимо таблицю і як перше значення x введемо нижню межу інтеграції, тобто в нашому випадку – одиницю.

Наступні значення x отримаємо її збільшенням на величину кроку. На рис. 3.4 показано, як записуються основні формули для обчислення значень підінтегральної функції $y = LN(x)$.

	A	B	C
1	шаг h=	=(EXP(1)-1)/10	
2			
3	Xi	Yi	
4	1	=LN(A4)	
5	=A4*B$1		

Рис. 3.4 – Формування таблиці для обчислення значень підінтегральної функції

Після застосування n+1 разу даної формули отримаємо відповідні значення функції $y = LN(x)$, які позначаємо $y_0; y_1; \ldots y_n$. Побудуємо графік функції на відрізку $[1, e]$ рис 3.5. Таким чином, значення визначеного інтеграла дорівнює площі даної криволінійної трапеції. Використовуючи значення y_i, за допомогою формул (3.1), (3.2), (3.3) і (3.5) обчислимо наближені значення даного інтеграла, вводячи їх у відповідні чарунки.

Результати обчислень представлені нижче:

крок h=	**0,171828**

x	Y
1	0
1,17183	0,1585651
1,34366	0,2953945
1,51548	0,4157352
1,68731	0,5231372
1,85914	0,6201145
2,03097	0,7085131
2,2028	0,789728
2,37463	0,8648397
2,54645	0,9347017
2,71828	1

y_0

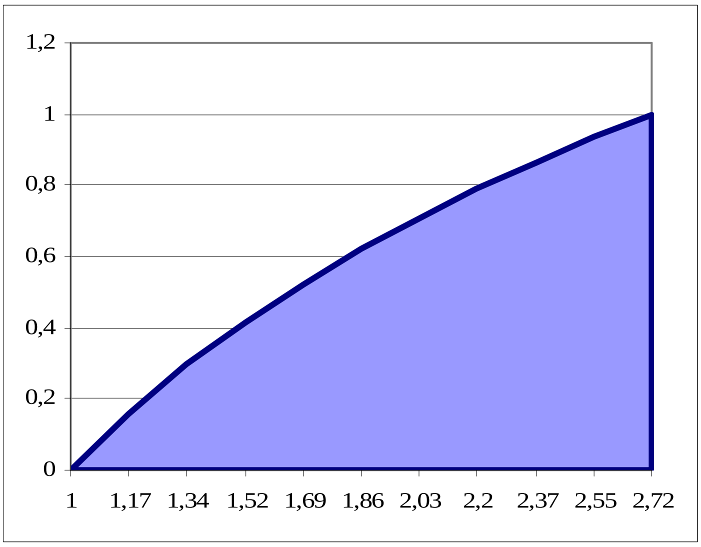


Рис. 3.5 – Графік функції

МЕТОДИ:

прямокутників	0,91253291
	1,084361
трапецій	0,998447
Симпсона	0,999991

ПОХИБКИ

$$f' = \frac{1}{x} \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \Delta = 0.025;$$

$$f'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \Delta = 7,2 \cdot 10^{-4};$$

$$f^{IV} = \frac{6}{x^4} \Rightarrow M = 6 \Rightarrow \Delta = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Формула (3.1), яка вводиться у чарунку С18, може бути записана у вигляді:

=СУМ(B4:B13)*B1

Таким чином, наближене значення інтеграла . $J = \int_1^e Lnx dx = 0,999991$

Порівняємо з точним значенням, яке обчислюється за формулою:

y_n

Похибка не перевищує 10^{-5}.

3.4. Метод Монте-Карло

У попередніх пунктах подано декілька різних чисельних методів інтеграції, в яких використовувалися значення функції $f(x)$ обчислені в рівновіддалених точках. Проте існує ще інший підхід, суть якого полягає в наступному.

Уявимо собі прямокутник висотою (*d-c*) і довжиною (*b–a*) такий, що функція *fx)* цілком лежить усередині даного прямокутника (рис. 3.6).

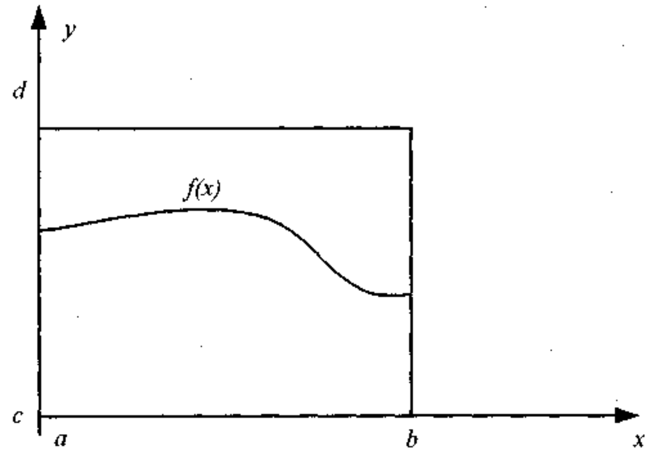


Рис. 3.6 – Метод Монте-Карло

Згенеруємо N пар випадкових чисел, рівномірно розподілених в даному прямокутнику:

$$a < x_i < b, \quad c < \mathrm{y}_\mathrm{i} < \mathrm{d} \ .$$

Тоді частина точок (x_i, y_i), що задовольняють умові $y_i \le f(x_i)$, є оцінкою відношення інтеграла від функції *f(x)* до площі даного прямокутника. Отже оцінка інтеграла в даному методі може бути отримана за формулою:

$$J_{MK} \approx A \frac{n_s}{N} \tag{3.6}$$

де n_s — число точок, що задовольняють умові $y_i \le f(x_i)$; N — повна кількість точок; A — площа прямокутника.

Можна запропонувати ще інший шлях обчислення визначеного інтеграла, розглядаючи його як середнє значення функції *f(x)* на відрізку *[a, b]:*

$$J_{MK} \approx \frac{(b-a)}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \, . \tag{3.7}$$

де x_i послідовність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу на відрізку $[a, b]$.

Похибка методу Монте-Карло міняється як $O(n^{-0.5})$.

Приклад. За допомогою методу Монте-Карло обчислити визначений інтеграл

$$J = \int_1^e \ln xdx$$

Розв'язання. За допомогою VBA створимо дві функції МК1 (обчислюється за формулою (3.6) і Мк2 (обчислюється за формулою (3.7):

Текст коду	*Коментарі (не вводити)*
Function MK1(N, a, b)	Оголошена функція Мк1, вхідні параметри: N – число точок; a, b – нижня і верхня межі інтеграції
f1 = Log(a) f2 = Log(b) SP = (b - a) * (f2 - f1) k = 0	визначається площа прямокутника SP
For i = 1 To N x = a + (b - a) * Rnd(1) y = f1 + (f2 - f1) * Rnd(1) f = Log(x)	відкривається цикл, обчислюються випадкові значення *x*, і відповідні значення функції в точці *x*
If y < =f Then k = k + 1	якщо y<f, то додається точка, що задовольняє нерівності
Next	кінець циклу, якщо i>N
MK1 = SP * k / N End Function	обчислення інтеграла за формулою (3.6)
Function MK2(N, a, b)	Оголошена функція Мк2, вхідні параметри: N – число точок; a, b – нижня і верхня межі інтеграції
h = (b - a) / N s = 0	визначається h
For i = 1 To N x = a + (b - a) * Rnd(1) s = s + Log(x)	відкривається цикл, обчислюються випадкові значення *x* і проводиться підсумовування значень функції в точках *x*.
Next	кінець циклу, якщо i>N
MK2 = h * s End Function	обчислення інтеграла за формулою (3.7)

Тут використовується функція RND(1), що генерує випадкові числа в інтервалі [0; 1].

Результат використання функцій в MS Excel показаний на рис. 3.7:

B5 =mk2(B1;B2;B3)

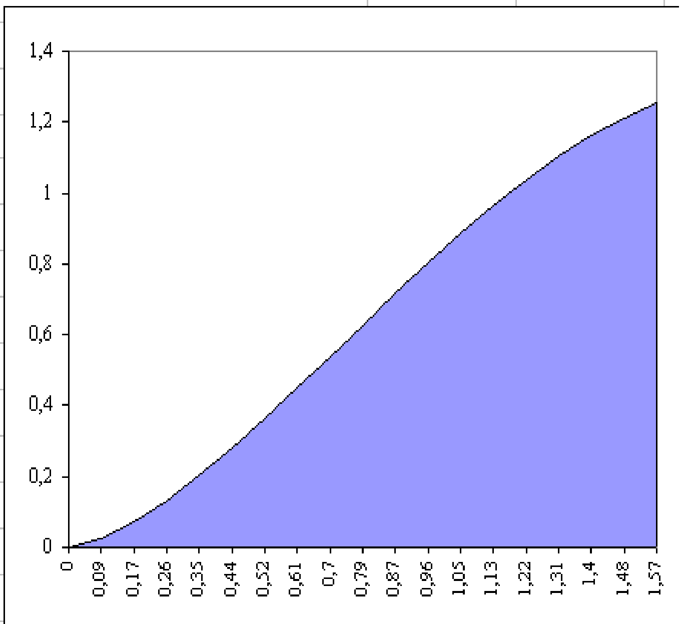
	A	B
1	N=	1000000
2	a=	1
3	b=	2,71828183
4	**Метод Монте-Карло (3.6)**	-0,9989335
5	**Метод Монте-Карло (3.7)**	1,00092374
6		

Рис. 3.7 – Результати обчислень за методом Монте-Карло

Приклад. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} \sqrt{x} \sin xdx$, використовуючи метод Монте-Карло за формулами (3.6) і (3.7).

Розв'язання

	A	B	C	D	E
1	N=	1000000	**Метод прямокутників**	0,922961	1,032333
2	a=	0	**Метод трапецій**	0,977647	
3	b=	1,57079633	**Метод Сімпсона**	0,977483	
4	**Метод Монте-Карло (3.6)**	0,976810			
5	**Метод Монте-Карло (3.7)**	0,977146			
6	**шаг h=**	0,08726646			
7	**Xi крок**	**Yi**			
8	0	0			
9	0,087266463	0,02574659			
10	0,174532925	0,07254524			
11	0,261799388	0,13242822			
12	0,34906585	0,20207164			
13	0,436332313	0,27916242			
14	0,523598776	0,36180063			
15	0,610865238	0,44829512			
16	0,698131701	0,53707653			
17	0,785398163	0,62665707			
18	0,872664626	0,71561206			
19	0,959931089	0,80257301			
20	1,047197551	0,88622693			
21	1,134464014	0,96531949			



Таким чином $\int_0^{\pi} \sqrt{x} \sin xdx \approx 0.977$

3.5. Розрахунково-графічна робота № 3

Знайти наближене значення визначених інтегралів за допомогою методів прямокутників, трапецій, Сімпсона і Монте-Карло. Наближене значення інтеграла порівняти з точним значенням і визначити похибку.

1. а) $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$	б) $\int_{0}^{1} x^{1.5}(1-x)^{0.5} dx$
2. а) $\int_{0}^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$	б) $\int_{0,1}^{0,9} \frac{x^{-0.5}}{(1-x)^{0.5}} dx$
3. а) $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{(x+3)^2}$	б) $\int_{0}^{1,2} \frac{dx}{(1-x^4)^{0.25}}$
4. а) $\int_{1}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$	б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{xdx}{\sin x}$
5. а) $\int_{0}^{0.9} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{xdx}{tgx}$
6. а) $\int_{0}^{\pi} x \sin x dx$	б) $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^4} dx$
7. а) $\int_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}$	б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$
8. а) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$	б) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\ln x}$
9. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$	б) $\int_{0}^{1} (1+x)\frac{\ln x}{1+x} dx$
10. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	б) $\int_{1}^{3} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$
11. а) $\int_{1}^{3} \frac{x^2 dx}{2x+3}$	б) $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-0.1\sin^2 x} dx$
12. а) $\int_{0}^{1} xe^{2x} dx$	б) $\int_{0,5}^{1,5} \frac{x^{0.5}+x^{-0.5}}{1+x^2} dx$
13. а) $\int_{0}^{0.8} \frac{dx}{1-x^2}$	б) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{x^2 dx}{\sin^2 x}$
14. а) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x+x^2}$	б) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$
15. а) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x+x^2}$	б) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$

16. а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$	б) $\int_0^{0,9} \frac{x \ln x}{1-x} dx$
17. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$	б) $\int_{0,2}^{1} \sqrt{-\ln x} dx$
18. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$	б) $\int_{0.2}^{1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^2 dx$
19. а) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$	б) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x}{1+\cos^2 2x} dx$
20. а) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x+x^2}$	б) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin 3x}{1+\cos^2 3x} dx$
21. а) $\int_0^1 \ln(1+x) dx$	б) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
22. а) $\int_0^{0,9} \ln(1-x) dx$	б) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{4+3\cos x} dx$
23. а) $\int_0^2 x^2 e^x dx$	б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$
24. а) $\int_1^e x^2 \ln x dx$	б) $\int_0^{0.9} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$
25. а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$	б) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$
26. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$	б) $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x} dx$
27. а) $\int_0^1 x e^{-x} dx$	б) $\int_{0,2}^1 \frac{x^{1/3}+x^{-1/3}}{1+x^2} dx$
28. а) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$	б) $\int_0^{0.9} \frac{x}{\sqrt{1-x^5}} dx$
29. а) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$	б) $\int_{0,1}^{0,9} \frac{x \ln x}{1-x^2} dx$
30. а) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$	б) $\int_0^{0.9} \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} dx$

3.6. Задачі для самостійного розв'язання

Знайти наближені значення наступних визначених інтегралів:

Інтеграли	Відповідь за методом Сімпсона
1. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x dx$	1.0000002 (n=20)
2. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$	0.52359881 (n=20)
3. $\int_{0}^{\pi/3} tgx dx$	0.69315036 (n=20)
4. $\int_{2}^{3} \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$	0.33423917 (n=20)
5. $\int_{0}^{0.5} e^{-x^2} dx$	0,46128101 (n=20)
6. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{(2\sin x + 5\cos x)^2} dx$	0.10001928 (n=20)
7. $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x+\sqrt{x^2+1}} dx$	0.59040751 (n=20)
8. $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$	0.40413385 (n=20)

3.7. Питання до теми

1. В якому випадку використовується чисельна інтеграція?
2. Постановка задачі чисельної інтеграції.
3. Які існують чисельні методи інтеграції функції?
4. Графічна інтерпретація методу прямокутників.
5. Як оцінити похибку методу прямокутників?
6. Графічна інтерпретація методу трапецій.
7. Як оцінити похибку методу трапецій?
8. Графічна інтерпретація методу Сімпсона.
9. Як оцінити похибку методу Сімпсона?
10. Чим відрізняються формули методу трапецій і методу Сімпсона?
11. Як впливає на точність чисельної інтеграції величина кроку h ?
12. Чим відрізняється обчислення похибку методу трапецій і Сімпсона?
13. Основна ідея методу Монте-Карло.
14. Графічна інтерпретація методу Монте-Карло.
15. Як отримати чисельне розв’язання за допомогою MS Excel і VBA?

4. Наближене розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

4.1. Метод послідовних наближень Пікара

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \qquad (4.1)$$

з якого відома початкова умова $y(x_0) = y_0$.

Маємо задачу Коші. Тобто треба знайти рівняння кривої $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню (4.1) і проходить через точку (x_0, y_0).

Передбачаємо, що в околі точки (x_0, y_0) рівняння (4.1) задовольняє умовам теореми існування і єдності розв'язання.

Це означає, що якщо права частина рівняння безперервна в деякій області R:, $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$, то існує розв'язання, визначений в околі $|x - x_0| < d$ $(d > 0)$ і він єдиний, якщо виконана умова Ліпшица:

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \le N|\tilde{y} - y|. \qquad (4.2)$$

Найчастіше вважають $N = \max|f_y'(x, y)|$ в області R.

Побудуємо розв'язання для $x \ge x_0$. Інтегруючи (4.1) отримаємо інтегральне рівняння:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx, \qquad (4.3)$$

яке повинно задовольняти початковій умові.

Для розв'язання рівняння (4.3) застосуємо розроблений Пікаром метод послідовних наближень.

Перше наближення має вигляд

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx. \qquad (4.4)$$

Визначивши y_1 з цього рівняння, знайдемо друге наближення:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx. \qquad (4.5)$$

Всі подальші наближення будуються за рекурентною формулою:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx. \qquad (4.6)$$

Геометричною інтерпретацією методу є криві $y_n = \varphi_n(x)$, що проходять через точку (x_0, y_0). Можна довести, що метод послідовного наближення на відрізку $x_0, x_0 + d$ рівномірно збігається, причому гранична функція

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

задовольняє вихідному рівнянню і початковій умові.

Якщо права частина диференціального рівняння визначена і безперервна в області R і $M = \max|f(x, y)|$, то за величину d можна прийняти $d = \min(a, b/M)$, причому крива $y(x)$ при $x_0 \le x \le x_0 + d$ не вийде за межі трикутника, утвореного прямими $y = y_0 + M(x - x_0)$ $y = y_0 - M(x - x_0)$.

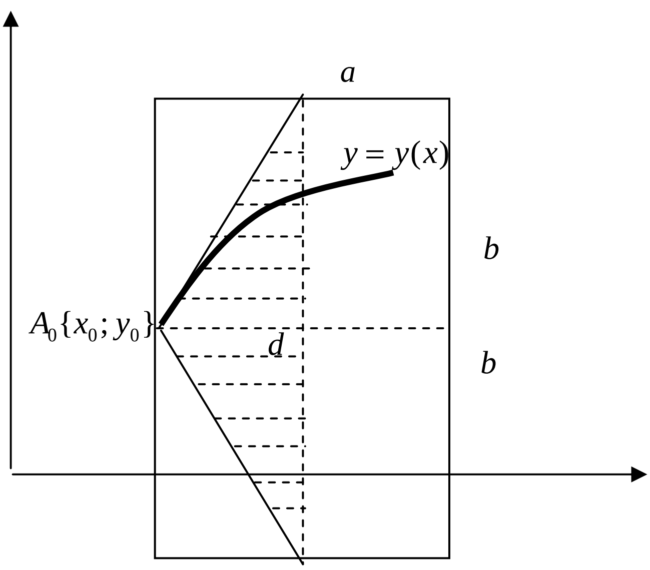


Рис. 4.1 – Збіжність розв’язання

Для оцінки похибки методу обчислюємо $\varepsilon_n = |y - y_n|$. Тобто з (4.3) віднімемо (4.6). Отримаємо: $y - y_n = \int_{x_0}^{x} [f(x, y) - f(x, y_{n-1})]dx$

$$\varepsilon_n = |y - y_n| \le \left| \int_{x_0}^{x} [f(x,y) - f(x,y_{n-1})]dx \right|$$

Через умову (4.2) знаходимо:

$$|f(x,y) - f(x,y_{n-1})| \le N|y - y_{n-1}| \le N\varepsilon_{n-1}$$

Отже $$\varepsilon_n \le \int_{x_0}^{x} N\varepsilon_{n-1}dx, \ (n = 1,2,3....). \qquad (4.7)$$

За теоремою Лагранжа на відрізку довжиною d:

$$\varepsilon_0 = |y - y_0| = (x - x_0)\cdot|y'(\xi)|, \text{ де } x_0 < \xi < x \ .$$

Оскільки $|y'(\xi)| \le |f(\xi, y(\xi))| \le M$, то $\varepsilon_0 \le M(x - x_0)$.

За формулою (4.7)

$$\varepsilon_1 \le N\int_{x_o}^{x} \varepsilon_0 dx \le NM\int_{x_o}^{x}(x - x_0)dx = NM\,\frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$\varepsilon_2 \le N\int_{x_o}^{x} \varepsilon_1 dx \le \frac{N^2M}{2!}\int_{x_o}^{x}(x - x_0)^2 dx = N^2M\,\frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

і т.д. Остаточно отримаємо $$\varepsilon_n = |y - y_n| \le MN^n\,\frac{d^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (4.8)$$

Приклад. 1. Знайти наближений розв’язок диференціального рівняння першого порядку $$y' = x - y, \qquad (*)$$

який задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

Розв’язання. Тут $y_0 = 1$. Тоді згідно з (4.6)

$$y_n = 1 + \int_{0}^{x} f(x, y_{n-1})dx, \text{ де } \ f(x, y_{n-1}) = x - y_{n-1}.$$

Крок 1 (n=1)., $f(x, y_0) = x - y_0 = x - 1$,тоді $y_1 = 1 + \int_0^x (x-1)dx = 1 - x + 0.5x^2$.

Крок 2 (n=2)., $f(x, y_1) = x - y_1 = x - 1 + x - 0.5x^2 = -1 + 2x - 0.5x^2$,тоді

$$y_2 = 1 + \int_0^x (-1 + 2x - 0.5x^2)dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}.$$

Аналогічно виконаємо третій і четвертий кроки і отримаємо:

$$y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$$

Оцінимо похибку в області R [0,1;0,2], тобто $a=1$, $b=1$ (див. рис. 4.1). Маємо: $|f(x,y)| \le |x-y| \le |x| + |y| \le a+b = 2 = M$, $d = \min\{a; b/M\} = \min\{1; 0.5\} = 0.5$ $N = \max|f_y^{'}| = 1$. Таким чином, $\varepsilon_4 \le 2 \cdot 1^4 \cdot \frac{0.5^5}{5!} = \frac{1}{1920}$=5*10^{-4}

Знайдемо загальний розв’язок даного диференціального рівняння. Для цього вважаємо $y = u(x) \cdot v(x)$. Підставимо в дане рівняння (*). Отримаємо:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \left(\frac{dv}{dx} + v \right) = x \qquad (**)$$

Прирівняємо до нуля вираз в дужках і про інтегруємо його.

Отримаємо $\int \frac{dv}{v} = -\int dx$, звідки $\ln v = -x$.

Отже перша невідома функція знайдена: $v = e^{-x}$.

Підставимо отриману функцію у дане рівняння і проінтегруємо його. Отримаємо $\int du = \int xe^{x} dx$.

Звідки $u = e^{x}(x-1) + C$.

Отже, друга невідома функція знайдена.

Загальний розв’язок даного рівняння має вигляд: $y = x - 1 + Ce^{-x}$

Для визначення постійної інтеграції використовуємо початкову умову $y(0) = 1$. Тоді *C=2.*

Таким чином, частинний точний розв’язок, що відповідає початковій умові диференціального рівняння має вигляд $y = 2e^{-x} - 1 + x$.

Складемо таблицю, в якій порівнюються точний і наближений розв’язок.

Таблиця 4.1. Метод послідовних наближень

x_i	y	y_4	y-y_4
0	1	1	0,0000000
0,05	0,952459	0,952459	0,0000000
0,1	0,909675	0,909675	-0,0000001
0,15	0,871416	0,871417	-0,0000006
0,2	0,837462	0,837464	-0,0000025
0,25	0,807602	0,807609	-0,0000075
0,3	0,781636	0,781655	-0,0000183
0,35	0,759376	0,759415	-0,0000389
0,4	0,74064	0,740715	-0,0000746
0,45	0,725256	0,725388	-0,0001321

На рис. 4.2 видно, що похибка збільшується при віддалені x від початкового значення:

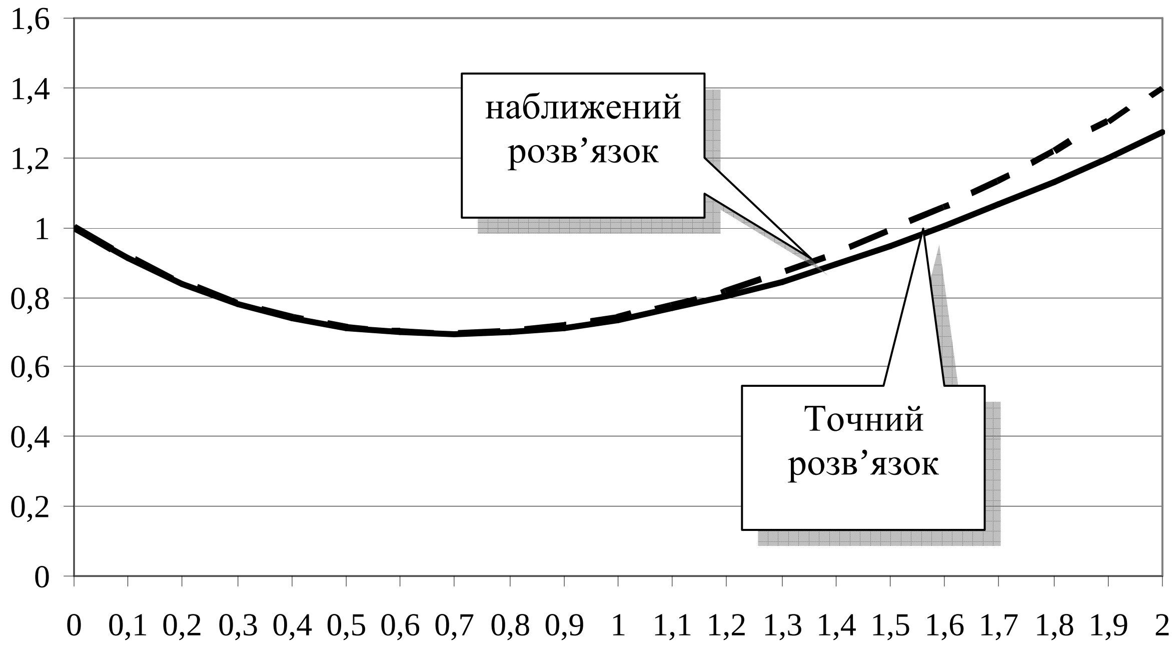


Рис. 4.2 – Порівняння точного і наближеного розв'язків

Приклад 2. Знайти розв'язання диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{8x} - 3x^2 \qquad (***)$$

яке відповідає початковій умові $y(1) = -1$

Розв'язання. Згідно з (4.6):

$$y_n = -1 + \int_1^x f(x, y_{n-1})dx \text{, де}$$

Крок 1 (n=1). $f(x,y_0) = -\frac{1}{8x} - 3x^2$; тоді

$$y_1 = -1 - \frac{1}{8}\int_1^x \frac{dx}{x} - 3\int_1^x x^2 dx = 1 + \frac{1}{8}\ln x\Big|_1^x - x^3\Big|_1^x = -1 - \frac{\ln x}{8} - x^3 + 1 = -\frac{\ln x}{8} - x^3.$$

Крок 2 (n=2). $f(x,y_1) = \frac{1}{8x}\cdot(-\frac{\ln x}{8} - x^3) - 3x^2 = -\frac{\ln x}{64x} - \frac{25}{8}x^2$;

тоді: $y_2 = -1 - \frac{1}{64}\int_1^x \frac{\ln x dx}{x} - \frac{25}{8}\int_1^x x^2 dx = -\frac{1}{128}\ln^2 x - \frac{25}{24}x^3 + \frac{1}{24}.$

Крок 3 (n=3).

$$f(x,y_2) = \frac{1}{8x}\cdot(-\frac{1}{128}\ln^2 x - \frac{25}{24}x^3 + \frac{1}{24}) - 3x^2 = \frac{1}{192x} - \frac{\ln^2 x}{1024x} - \frac{601}{192}x^2;$$

тоді:

$$y_3 = -1 + 0{,}0052083\cdot\ln x + 0.00032552083\cdot\ln^3 x - 1{,}04340278\cdot(x^3 - 1).$$

Знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння за відомою методикою. Воно має вигляд:

$$y = -\frac{24}{23}x^3 + Cx^{\frac{1}{8}}.$$

Для визначення постійної інтеграції використовуємо початкову умову $y(1) = -1$. Тоді *C=1/23*. Таким чином, частинний (точний) розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд . $y = -\frac{24}{23}x^3 + \frac{1}{23}x^{\frac{1}{8}}$.

Складемо таблицю, в якій порівнюються точне і наближене розв'язання.

Таблиця 4.2 – Порівняння точного і наближеного розв'язків

x_i	y	y_n	$y_n - y$
1	-1,00000	-1,0000	0,000000
1,05	-1,16421	-1,1642	0,000000
1,1	-1,34487	-1,3449	0,000000
1,15	-1,54276	-1,5428	0,000000
1,2	-1,75865	-1,7586	0,000000
1,25	-1,99334	-1,9933	0,000001
1,3	-2,24759	-2,2476	0,000001
1,35	-2,52221	-2,5222	0,000002

1,4	-2,81796	-2,8180	0,000004
1,45	-3,13563	-3,1356	0,000006
1,5	-3,47600	-3,4760	0,000009
1,55	-3,83986	-3,8398	0,000013
1,6	-4,22798	-4,2280	0,000017
1,65	-4,64115	-4,6411	0,000022
1,7	-5,08015	-5,0801	0,000029
1,75	-5,54576	-5,5457	0,000036
1,8	-6,03877	-6,0387	0,000045
1,85	-6,55996	-6,5599	0,000055
1,9	-7,11011	-7,1100	0,000067
1,95	-7,69000	-7,6899	0,000080
2	-8,30041	-8,3003	0,000095

Застосування методу Пікара вимагає обчислення інтегралів, що може виявитися дуже громіздким або навіть нездійсненним в елементарних функціях. Крім того, у питаннях практичного застосування математику частіше потрібна не формула, що дає розв'язання, а числові значення функції при відомих значеннях аргументу.

4.2. Метод Ейлера

Розглянемо те саме диференціальне рівняння першого порядку, яке подано у розділі 4.1:

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

і $y(x_0) = y_0$

Задаємо крок h <u>*настільки малим*</u>, що для всіх x в інтервалі $[x_0; x_1]$, $(x_1 = x_0 + h)$ значення функції y мало відрізнятимуться від y_0. Тоді для цього інтервалу можна записати

$$y = y_0 + (x - x_0) \cdot y_0' = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0; y_0).$$

Отже крива на цій ділянці в точці $(x_0; y_0)$ замінюється дотичною. Тоді

$$y_1 = y\big|_{x=x_1} = y_0 + hy_0' = y_0 + hf(x_0; y_0).$$

Те саме можна записати для другої ділянки: $y_2 = y_1 + hy_1' = y_1 + hf(x_1; y_1)$.

У результаті отримаємо рекурентну формулу Ейлера, що реалізовує чисельний розв’язок диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i). \tag{4.9}$$

Недоліки методу: низька точність і накопичення похибок. Але якщо $f(x, y)$ у рівнянні (4.1) безперервна, то послідовність y_n при h>0 на малому відрізку рівномірно збігається до шуканої кривої.

Приклад. За допомогою методу Ейлера знайти чисельне розв’язання диференціального рівняння (*) з попереднього розділу.

<u>Розв’язання</u>. Відрізок [0; 0.5] розіб'ємо на 10 частин з кроком h=0.05. Тоді згідно з формулою (4.9) отримаємо:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0{,}05 \cdot (0 - 1) = 0{,}95$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 0{,}95 + 0{,}05 \cdot (0{,}05 - 0{,}95) = 0{,}95 - 0{,}045 = 0{,}905$$

і т.д

Результати представимо в табл. 4.3:

Таблиця 4.3 – Метод Ейлера

x_i	y_i	$f(x_i,y_i)*h$	y	$y-y_i$
0	1	-0,05	1	0
0,05	0,95	-0,045	0,952459	0,002458849
0,1	0,905	-0,04025	0,909675	0,004674836
0,15	0,86475	-0,03574	0,871416	0,006665953
0,2	0,829013	-0,03145	0,837462	0,008449006
0,25	0,797562	-0,02738	0,807602	0,010039691
0,3	0,770184	-0,02351	0,781636	0,01145266
0,35	0,746675	-0,01983	0,759376	0,012701587
0,4	0,726841	-0,01634	0,74064	0,013799229
0,45	0,710499	-0,01302	0,725256	0,014757484
0,5	0,697474	-0,00987	0,713061	0,015587441

Відносна похибка склала 11%, причому точність розв'язання зменшується при віддалені x від початкового значення (рис. 4.3):

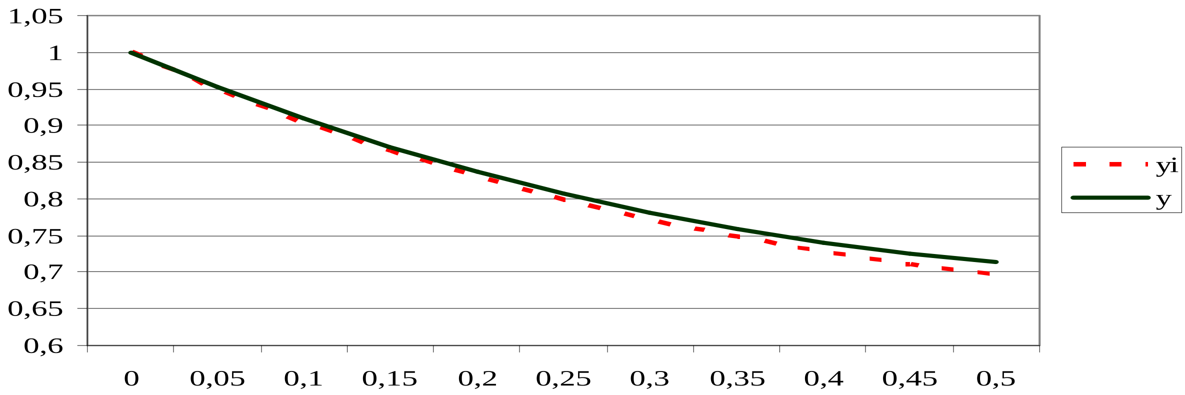


Рис. 4.3 – Порівняння чисельного розв'язання за методом Ейлера з аналітичним

4.3. Модифікації методу Ейлера

Знову розглянемо диференціальне рівняння (4.1) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибравши крок h, покладемо $x_i = x_0 + ih$, $(i = 0,1,2...)$. За методом Ейлера послідовні значення шуканого розв'язання обчислюються за наближеною формулою. Точнішим є удосконалений метод, при якому спочатку обчислюють проміжні значення.

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i), \tag{4.9}$$

а потім обчислюють поле напрямку інтегральних кривих у середніх точках, тобто

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}} . \tag{4.10}$$

Іншою модифікацією методу Ейлера є удосконалений метод Ейлера-Коші. Спочатку визначають «грубе» наближення за формулою (4.9), потім обчислюють $\tilde{f}_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$. Тоді формула чисельного розв'язання диференціального рівняння набирає вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2} \tag{4.11}$$

Приклад. За допомогою методів Ейлера і MS Excel знайти чисельне розв’язання диференціального рівняння першого порядку

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

за початковою умовою $y(0) = 1$

Розв’язання. Точне розв’язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$yy' = y^2 - 2x$$

і введемо заміну $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$. У результаті отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$z' - 2z = -4x\,.$$

Воно розв’язується за методикою, викладеною у попередніх прикладах. У результаті отримаємо розв’язання у вигляді:

$$y^2 = z = 2x + 1 + Ce^{2x}\,.$$

За початковою умовою визначаємо C=0. Таким чином, точне розв’язання даного рівняння має вигляд:

$$y_T = \sqrt{2x+1}$$

Метод Ейлера. Крок 1. Відрізок [0; 0.5] розіб'ємо на 10 частин з кроком *h=0.05*. Тоді, згідно з формулою (4.9) отримаємо:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0.05 \cdot (1 - 0) = 1.05,$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 1.05 + 0.05 \cdot (1.05 - 2 \cdot 0.05/1.05) = 1{,}0977381$$

і т. д.

Для розв’язання задачі використовуємо MS Excel. У табл.. 4.4 представлені результати розрахунків за точним розв’язанням і за методом Ейлера.

Таблиця 4.4 – Порівняння результатів розрахунків за точним розв’язанням і за методом Ейлера

	точне розв’язання	метод Эйлера		
x_i	y_T	y_i	hf_i	$\lvert y_T - y_i \rvert$
0	1	1	0,05	0
0,05	1,048809	1,05	0,04774	0,00119
0,1	1,095445	1,097738	0,04578	0,00229
0,15	1,140175	1,143515	0,04406	0,00334
0,2	1,183216	1,187574	0,04254	0,00436
0,25	1,224745	1,230111	0,04118	0,00537
0,3	1,264911	1,271294	0,03997	0,00638
0,35	1,30384	1,31126	0,03887	0,00742
0,4	1,341641	1,350131	0,03788	0,00849
0,45	1,378405	1,388011	0,03698	0,00961
0,5	1,414214	1,424991	0,03616	0,01078

=$B$2*(C4-2*A4/C4)

=C4+D4

=корінь(2*A4+1)

Модифікований метод Ейлера. Відрізок [0; 0,5] розіб'ємо на 10 частин з кроком

h=0,05. Обчислимо: $x_{0+\frac{1}{2}} = 0{,}025;\ y_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0{,}025 \cdot (1-0) = 1{,}025;$

$$f_{0+\frac{1}{2}} = 1{,}025 - 2 \cdot 0{,}025 / 1{,}025 = 0{,}9762195.$$

Тоді за формулою (4.10) отримаємо $y_1 = y_0 + hf_{0+\frac{1}{2}} = 1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9762195 = 1{,}048811$

і т.д. У MS Excel створимо табл. 4.5, в яку розміщуємо чисельне розв’язання диференціального рівняння за модифікованим методом

Таблиця 4.5 – Модифікований метод Ейлера

x_i	y_i	$hf_i/2$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$hf_{i+\frac{1}{2}}$	y_T	$\lvert y_T - y_i \rvert$
0	1	0,025	0,025	1,025	0,048811	1	0,00000
0,05	1,048811	0,023836623	0,075	1,072648	0,04664	1,048808848	0,00000
0,1	1,095451	0,022821954	0,125	1,118273	0,044736	1,095445115	-0,00001
0,15	1,140187	0,021926807	0,175	1,162114	0,043047	1,140175425	-0,00001
0,2	1,183234	0,021129435	0,225	1,204363	0,041536	1,183215957	-0,00002
0,25	1,22477	0,020413254	0,275	1,245183	0,040174	1,224744871	-0,00003
0,3	1,264944	0,019765372	0,325	1,284709	0,038938	1,264911064	-0,00003
0,35	1,303882	0,019175592	0,375	1,323058	0,037809	1,303840481	-0,00004
0,4	1,341691	0,018635731	0,425	1,360327	0,036774	1,341640786	-0,00005
0,45	1,378465	0,018139135	0,475	1,396605	0,035819	1,378404875	-0,00006
0,5	1,414285						

Примітка.

У перший рядок третього стовпця вводимо формулу: =$B$2(B4-2*A4/B4)/2,*

у перший рядок четвертого стовпця вводимо формулу: A4+b2/2,

у перший рядок п'ятого стовпця вводимо формулу: =B4+C4,

у перший рядок шостого стовпця вводимо формулу: =$B$2(E4-2*D4/E4),*

у перший рядок другого стовпця вводимо формулу: =B4+F4.

<u>Модифікований метод Ейлера-Коши.</u> За формулою (4.9) отримаємо:

$hf(x_0; y_0) = hf_0 = 0{,}05 \cdot (1-0) = 0{,}05,$

$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 + 0{,}05 = 1{,}05,$

$h\tilde{f}_1 = f(x_1, y_1) = 0{,}05 \cdot (1{,}05 - 2 * 0{,}05 / 1{,}05) = 0{,}0477381.$

За формулою (4.11) отримаємо:

$$y_1 = y_0 + \frac{hf_0 + h\tilde{f}_1}{2} = 1 + 0{,}5 \cdot (0{,}05 + 0{,}477381) = 1{,}048869 \quad \text{і т.д.}$$

У MS Excel створимо таблицю, в яку заносимо всі проміжні результати чисельного розв’язання диференціального рівняння методом Ейлера-Коши:

Таблиця 4.6 – Модифікований метод Ейлера-Коши

x_i	y_i	hf_i	x_{i+1}	y_{i+1}	$h\tilde{f}_{i+1}$	$h(f_i + \tilde{f}_{i+1})/2$	y_T	$\lvert y_T - y_i \rvert$
0	1	0,05	0,05	1,05	0,047738	0,04887	1	0,00000
0,05	1,048869	0,047676	0,1	1,096545	0,045708	0,04669	1,048809	0,00006
0,1	1,095561	0,045650	0,15	1,141211	0,043917	0,04478	1,095445	0,00012
0,15	1,140345	0,043863	0,2	1,184208	0,042321	0,04309	1,140175	0,00017
0,2	1,183437	0,042272	0,25	1,225709	0,040889	0,04158	1,183216	0,00022
0,25	1,225017	0,040843	0,3	1,26586	0,039594	0,04022	1,224745	0,00027
0,3	1,265236	0,039551	0,35	1,304787	0,038415	0,03898	1,264911	0,00032
0,35	1,304219	0,038375	0,4	1,342594	0,037337	0,03786	1,30384	0,00038
0,4	1,342075	0,037299	0,45	1,379374	0,036345	0,03682	1,341641	0,00043
0,45	1,378897	0,036310	0,5	1,415207	0,03543	0,03587	1,378405	0,00049
0,5								

Примітка.

У перший рядок третього стовпця вводимо формулу: =$B$2(B4-2*a4/в4),*

у перший рядок четвертого стовпця вводимо формулу: A4+b2,

у перший рядок п'ятого стовпця вводимо формулу: =B4+C4,

у перший рядок шостого стовпця вводимо формулу: =$B$2(E4-2*d4/e4),*

у перший рядок сьомого стовпця вводимо формулу: =(C4+f4)/2,

у другий рядок другого стовпця вводимо формулу: =B4+G4.

4.4. Метод Рунге-Кутта

Дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибираємо крок *h*, покладемо $x_i = x_0 + ih,\ (i = 0,1,2...)$.

Розглядимо числа:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}), \\ k_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}), \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Тоді, згідно з методом Рунге-Кутта послідовні чисельні значення функції визначаємо за формулою

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Похибка методу на кожному кроці – величина порядку h^5. У табл.. 4.7 подана схема реалізації методу Рунге-Кутта.

Таблиця 4.7 – Схема реалізації методу Рунге-Кутта

xi	*yi*	k_1^i	k_2^i	k_3^i
x_0	y_0	$k_1^0 = hf(x_0, y_0)$	$k_2^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2})$	$k_3^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2})$
x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$k_1^1 = hf(x_1, y_1)$	$k_2^1 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^1}{2})$	$k_3^1 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^1}{2})$
.	..	..	...	..

Продовження табл. 4.7

k_4^i	*Δyi*
$k_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0)$	$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$
$k_4^1 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3^1)$	$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)})$
....	...

Приклад. За допомогою методу Рунге-Кутта розв'язати диференціальне рівняння $y' = x - y$ за початковою умовою $y(0) = 1$.

Розв'язання. Відрізок [0; 0.5] розіб'ємо на 10 частин з кроком h=0.05. Тоді, згідно з формулою (4.9) отримаємо на першому кроці:

$k_1^{(0)} = hf(x_0; y_0) = 0{,}05 \cdot (0 - 1) = -0{,}05,$

$k_2^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}) = 0{,}05 \cdot (0{,}025 - 1 + 0{,}05/2) = \text{-}0{,}0475,$

$k_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}) = 0{,}05 \cdot (0{,}025 - 1 + 0{,}0475/2) = -0{,}0475625,$ і т. д.

$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}) = 0{,}05 \cdot (0{,}05 - 1 + 0{,}0475625) = \text{-}0{,}045121875,$

$\Delta y_0 = (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + k_3^{(0)} + k_4^{(0)})/6 = 0{,}952458854,$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 - 0{,}045121875 = 0{,}95245885.$

Результати представимо в таблиці:

Таблиця 4.8 – Метод Рунге-Кутта

	Метод Рунге-кутта						точне розв'язання і похибка	
x_i	y_i	k_1^i	k_2^i	k_3^i	k_4^i	Δy_i	y_T	$\lvert y_T - y_i\rvert$
0	1,000000	-0,050000	-0,047500	-0,047563	-0,045122	-0,047541	1,000000	0,00000000
0,05	0,952459	-0,045123	-0,042745	-0,042804	-0,040483	-0,042784	0,952459	0,00000001
0,1	0,909675	-0,040484	-0,038222	-0,038278	-0,036070	-0,038259	0,909675	0,00000001
0,15	0,871416	-0,036071	-0,033919	-0,033973	-0,031872	-0,033954	0,871416	0,00000001
0,2	0,837462	-0,031873	-0,029826	-0,029877	-0,027879	-0,029860	0,837462	0,00000002
0,25	0,807602	-0,027880	-0,025933	-0,025982	-0,024081	-0,025965	0,807602	0,00000002
0,3	0,781636	-0,024082	-0,022230	-0,022276	-0,020468	-0,022260	0,781636	0,00000002
0,35	0,759376	-0,020469	-0,018707	-0,018751	-0,017031	-0,018736	0,759376	0,00000003
0,4	0,740640	-0,017032	-0,015356	-0,015398	-0,013762	-0,015384	0,740640	0,00000003
0,45	0,725256	-0,013763	-0,012169	-0,012209	-0,010652	-0,012195	0,725256	0,00000003
0,5	0,713061	-0,010653	-0,009137	-0,009175	-0,007694	-0,009162	0,713061	0,00000003
0,55	0,703900	-0,007695	-0,006253	-0,006289	-0,004881	-0,006276	0,703900	0,00000003
0,6	0,697623	-0,004881	-0,003509	-0,003543	-0,002204	-0,003532	0,697623	0,00000004
0,65	0,694092	-0,002205	-0,000899	-0,000932	0,000342	-0,000921	0,694092	0,00000004
0,7	0,693171	0,000341	0,001583	0,001552	0,002764	0,001562	0,693171	0,00000004
0,75	0,694733	0,002763	0,003944	0,003915	0,005068	0,003925	0,694733	0,00000004
0,8	0,698658	0,005067	0,006190	0,006162	0,007259	0,006172	0,698658	0,00000004
0,85	0,704830	0,007259	0,008327	0,008300	0,009343	0,008309	0,704830	0,00000004
0,9	0,713139	0,009343	0,010359	0,010334	0,011326	0,010343	0,713139	0,00000004
0,95	0,723482	0,011326	0,012293	0,012269	0,013212	0,012277	0,723482	0,00000004
1	0,735759	0,013212	0,014132	0,014109	0,015007	0,014117	0,735759	0,00000004

Приклад. За допомогою методу Рунге-Кутта і MS Excel розв’язати диференціальне рівняння $y' = y - \frac{2x}{y}$

за початковою умовою $y(0) = 1$

Розв’язання. Створимо таблицю в MS Excel, ввівши у відповідні вікна початкові умови, крок і формули (4.12) і (4.13):

- у чарунку В2 вводимо значення кроку h=0,05;
- у чарунку А4 вводимо початкове значення *x=0;*
- у чарунку А4 вводимо початкове значення *y=1;*
- у чарунку А5 вводимо формулу: =A4+$B$2; цю процедуру повторюємо по рядках до значення *x=1;*
- у чарунку С4 вводимо формулу: =$B$2*(B4-2*A4/B4);
- у чарунку D4 вводимо формулу: $B$2*(B4+C4/2-2*(A4+$B$2/2)/(B4+C4/2));
- у чарунку E4 вводимо формулу: $B$2*(B4+D4/2-2*(A4+$B$2/2)/(B4+D4/2));
- у чарунку F4 вводимо формулу: $B$2*(B4+E4-2*(A4+$B$2)/(B4+E4));
- у чарунку G4 вводимо формулу: =(C4+2*D4+2*E4+F4)/6;
- у чарунку B5 вводимо формулу: =B4+G4.

Повторюємо їх по рядках таблиці. Чисельне розв’язання диференціального рівняння методом Рунге-Кутта подане в табл.. 4.9.

Таблиця 4.9 – Метод Рунге-Кутта

	Метод Рунге-кутта						точне розв’язання і похибка	
x_i	y_i	k_1^i	k_2^i	k_3^i	k_4^i	Δy_i	y_T	$\lvert y_T - y_i \rvert$
0	1,000000	0,050000	0,048811	0,048780	0,047672	0,048809	1,000000	0,0000000
0,05	1,048809	0,047673	0,046640	0,046611	0,045642	0,046636	1,048809	0,0000000
0,1	1,095445	0,045644	0,044735	0,044708	0,043852	0,044730	1,095445	0,0000000
0,15	1,140175	0,043853	0,043046	0,043021	0,042256	0,043041	1,140175	0,0000000
0,2	1,183216	0,042258	0,041535	0,041511	0,040824	0,041529	1,183216	0,0000000
0,25	1,224745	0,040825	0,040172	0,040150	0,039527	0,040166	1,224745	0,0000001
0,3	1,264911	0,039528	0,038936	0,038915	0,038347	0,038929	1,264911	0,0000001
0,35	1,303841	0,038348	0,037806	0,037787	0,037267	0,037800	1,303840	0,0000001
0,4	1,341641	0,037268	0,036770	0,036752	0,036273	0,036764	1,341641	0,0000001
0,45	1,378405	0,036274	0,035815	0,035797	0,035355	0,035809	1,378405	0,0000001

0,5	1,414214	0,035355	0,034930	0,034914	0,034502	0,034924	1,414214	0,0000001
0,55	1,449138	0,034503	0,034108	0,034092	0,033709	0,034102	1,449138	0,0000001
0,6	1,483240	0,033710	0,033341	0,033326	0,032968	0,033335	1,483240	0,0000002
0,65	1,516575	0,032969	0,032623	0,032610	0,032274	0,032618	1,516575	0,0000002
0,7	1,549194	0,032275	0,031950	0,031938	0,031622	0,031946	1,549193	0,0000002
0,75	1,581139	0,031623	0,031318	0,031305	0,031008	0,031313	1,581139	0,0000002
0,8	1,612452	0,031009	0,030721	0,030709	0,030428	0,030716	1,612452	0,0000002
0,85	1,643168	0,030429	0,030157	0,030146	0,029880	0,030152	1,643168	0,0000003
0,9	1,673320	0,029881	0,029623	0,029612	0,029361	0,029619	1,673320	0,0000003
0,95	1,702939	0,029361	0,029116	0,029106	0,028867	0,029112	1,702939	0,0000003
1	1,732051	0,028868	0,028635	0,028625	0,028398	0,028631	1,732051	0,0000003

Даний метод найбільш точний, оскільки абсолютна похибка розв’язання y_{20} не перевищує 10^{-6}.

4.5. Розрахунково-графічна робота № 4

Знайти наближені розв'язання диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(1) = -1$ на відрізку [1;2] з використанням: 1) методу послідовних наближень; 2) методу Ейлера; 3. методу Ейлера-Коші 4. методу Рунге-Кутта.

Порівняти наближені розв'язання з точним розв'язанням і оцінити похибку. Побудувати графік отриманої функції $y = y(x)$.

1. $y' = -\frac{y}{x} + x$
2. $y' = -\frac{y}{x} + x^2$
3. $y' = -\frac{y}{x} + x^3$
4. $y' = -\frac{y}{x} + x^4$
5. $y' = -\frac{2y}{x} + x$
6. $y' = -\frac{2y}{x} + x^2$
7. $y' = -\frac{2y}{x} + x^3$
8. $y' = -\frac{2y}{x} + x^4$
9. $y' = -\frac{y}{x} - x$
10. $y' = -\frac{y}{x} - x^2$
11. $y' = -\frac{y}{x} - x^3$
12. $y' = -\frac{y}{x} - x^4$
13. $y' = -\frac{2y}{x} - x$
14. $y' = -\frac{2y}{x} - x^2$
15. $y' = -\frac{2y}{x} - x^3$
16. $y' = -\frac{2y}{x} - x^4$
17. $y' = -\frac{y}{2x} - x$
18. $y' = -\frac{y}{2x} - x^2$
19. $y' = -\frac{y}{2x} - x^3$
20. $y' = -\frac{y}{2x} - x^4$
21. $y' = -\frac{y}{2x} + x^4$
22. $y' = -\frac{y}{2x} + x$
23. $y' = -\frac{y}{2x} + x^2$
24. $y' = -\frac{y}{2x} + x^3$
25. $y' = \frac{y}{x} + x$
26. $y' = \frac{y}{x} + x^2$
27. $y' = \frac{y}{x} + x^3$
28. $y' = \frac{y}{x} + x^4$
29. $y' = \frac{y}{x} - x^4$
30. $y' = \frac{y}{x} - x$
31. $y' = \frac{y}{x} - x^2$
32. $y' = \frac{y}{x} - x^3$
33. $y' = \frac{2y}{x} - x^2$
34. $y' = \frac{2y}{x} - x^3$
35. $y' = \frac{2y}{x} - x^4$
36. $y' = \frac{y}{2x} - x$
37. $y' = \frac{y}{2x} - x^2$
38. $y' = \frac{y}{2x} - x^3$
39. $y' = \frac{y}{2x} - x^4$
40. $y' = \frac{y}{x} + 2x$
41. $y' = \frac{y}{x} + 2x^2$
42. $y' = \frac{y}{x} + 2x^3$
43. $y' = \frac{y}{x} + 2x^4$
44. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^3$
45. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^4$
46. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^2$
47. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^2$
48. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^3$
49. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^4$
50. $y' = -\frac{y}{x} - 4x$
51. $y' = -\frac{y}{x} - 4x^2$
52. $y' = -\frac{y}{x} - 4x^4$
53. $y' = -\frac{y}{x} - 6x^4$
54. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^2$
55. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^3$
56. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^4$
57. $y' = \frac{y}{4x} + 8x$
58. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^2$
59. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^3$
60. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^4$
61. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^3$
62. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^4$
63. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^2$
64. $y' = \frac{y}{x} - 8x$
65. $y' = \frac{y}{x} - 8x^2$
66. $y' = \frac{y}{x} - 8x^3$
67. $y' = -\frac{y}{x} + 8x$
68. $y' = -\frac{y}{x} + 8x^2$

4.6. Задачі для самостійного розв'язання

1. Відомо, що інтеграл $\int e^{-x^2} dx$ не береться в елементарних функціях. Користуючись тим, що функція $y = e^{-x^2} \int\limits_0^{0.5} e^{-t^2} dt$ є розв'язанням рівняння $y' = 2xy + 1$ (початкова умова $y(0) = 0$), знайти чисельне розв'язання рівняння з використанням методу Сімпсона. За допомогою методу послідовних наближень (обмежуючись п'ятим кроком) визначити розв'язання диференціального рівняння і порівняти їх.

Відповідь: $y_5\big|_{x=0.5} = \left[x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{8}{105}x^7 + \frac{16}{945}x^9 \right]_{x=0,5} = 0.5923$.

2. За допомогою методу Ейлера знайти наближене розв'язання диференціального рівняння $y' = y^2 - x$, яке відповідає початковій умові $y(0) = 1$.

Відповідь: Фрагмент розв'язання представлено в таблиці:

x_i	y_i	$hf(x_i; y_i)$
0	1,000000	0,050000
0,05	1,050000	0,052625
0,1	1,102625	0,055789
0,15	1,158414	0,059596
0,2	1,218010	0,064177
0,25	1,282188	0,069700
0,3	1,351888	0,076380

3. За допомогою модифікованого методу Ейлера знайти чисельне розв'язання диференціального рівняння $y' = \sin x \cos x - y \cos x$, яке відповідає початковій умові $y(0) = 1$, і порівняти його з точним розв'язанням.

Відповідь: Точне розв'язання $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$.

Фрагмент розв'язання представлено в таблиці:

x_i	y_i	$0{,}5hf(x_i, y_i)$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$hf_{i+\frac{1}{2}}$	y_T	$\lvert y_i - y_T \rvert$
0	0,00000	0,00000	0,02500	0,00000	0,00125	0,00000	0,00000
0,05	0,00125	0,00243	0,07500	0,00368	0,00355	0,00123	0,00002
0,1	0,00480	0,00473	0,12500	0,00953	0,00571	0,00482	0,00002
0,15	0,01051	0,00687	0,17500	0,01738	0,00772	0,01063	0,00012
0,2	0,01823	0,00884	0,22500	0,02707	0,00955	0,01849	0,00026
0,25	0,02779	0,01064	0,27500	0,03842	0,01122	0,02823	0,00044
0,3	0,03900	0,01225	0,32500	0,05126	0,01270	0,03966	0,00066
0,35	0,05170	0,01368	0,37500	0,06538	0,01400	0,05261	0,00090
0,4	0,06570	0,01491	0,42500	0,08061	0,01511	0,06687	0,00117
0,45	0,08081	0,01594	0,47500	0,09676	0,01603	0,08225	0,00144
0,5	0,096847						

4. За допомогою методів Методу Рунге-Кутта знайти чисельне розв’язання диференціального рівняння $y' = 2xy + 1$, яке відповідає початковій умові $y(0) = 0$.

Відповідь: Фрагмент розв’язання представлено у таблиці:

xi	*yi*	k_1^i	k_2^i	k_3^i	k_4^i	Δy_i
0	0,00000	0,05000	0,05006	0,05006	0,05025	0,05008
0,05	0,05008	0,05025	0,05056	0,05057	0,05101	0,05059
0,1	0,10067	0,05101	0,05158	0,05158	0,05228	0,05160
0,15	0,15227	0,05228	0,05312	0,05313	0,05411	0,05315
0,2	0,20542	0,05411	0,05523	0,05524	0,05652	0,05526
0,25	0,26068	0,05652	0,05795	0,05797	0,05956	0,05798
0,3	0,31866	0,05956	0,06132	0,06135	0,06330	0,06137
0,35	0,38003	0,06330	0,06544	0,06548	0,06782	0,06549
0,4	0,445527	0,067821	0,07038	0,07043	0,07322	0,07044
0,45	0,515969	0,073219	0,07625	0,07632	0,07961	0,07633
0,5	0,592296	0,079615	0,08319	0,08328	0,08716	0,08328

5. За допомогою методу Рунге-Кутта знайти на відрізку [0; 1] чисельне розв’язання диференціального рівняння $y' = xe^{-x^2} - 2xy$, яке відповідає початковій умові $y(0) = 0$, і порівняти отриманий результат з точним розв’язанням.

Відповідь: Точне розв’язання має вигляд $y = 0.5x^2e^{-x^2}$.

Фрагмент розв'язання представлено в таблиці:

xi	*yi*	k_1^i	k_2^i	k_3^i	k_4^i	Δy_i	y_T
0	0,00000	0,00000	0,00020	0,00020	0,00040	0,00020	0
0,02	0,00020	0,00040	0,00060	0,00060	0,00080	0,00060	0,0002
0,04	0,00080	0,00080	0,00100	0,00099	0,00119	0,00099	0,0008
0,06	0,00179	0,00119	0,00139	0,00139	0,00158	0,00139	0,00179
0,08	0,00318	0,00158	0,00177	0,00177	0,00196	0,00177	0,00318
0,1	0,00495	0,00196	0,00215	0,00215	0,00233	0,00215	0,00495
0,12	0,00710	0,00233	0,00251	0,00251	0,00269	0,00251	0,0071
0,14	0,00961	0,00269	0,00287	0,00287	0,00304	0,00287	0,00961
0,16	0,01248	0,00304	0,00321	0,00321	0,00337	0,00321	0,01248
0,18	0,01568	0,00337	0,00353	0,00353	0,00369	0,00353	0,01568
0,2	0,01922	0,00369	0,00384	0,00384	0,00399	0,00384	0,01922

4.7. Питання до теми

1. Що означає — розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку?
2. Графічна інтерпретація чисельного розв'язання диференціального рівняння.
3. Які існують чисельні методи розв'язання диференціального рівняння першого порядку?
4. У чому суть методу послідовних наближень Пікара?
5. Яка похибка методу Пікара?
6. У чому полягає суть методу Ейлера?
7. Застосування яких формул дозволяє знайти значення шуканої функції за методом Ейлера?
8. У чому відмінність методу Ейлера і удосконалених методів Ейлера?
9. Як використовувати метод Рунге-Кутта для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку?
10. Як реалізувати метод Ейлера за допомогою MS Excel?

5. Розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних

5.1. Задача вільних поздовжніх коливань пружного стержня. Метод розділення змінних

Розглянемо вертикальний пружний стержень довжиною L з площею поперечного перетину S. Стержень зроблений з матеріалу щільністю ρ, який має модуль пружності E. Для визначеності, вважатимемо, що нижній кінець стержня жорстко закріплений, а верхній кінець – вільний. При короткочасній дії на стержень виникають поздовжні вільні коливання. Виведемо диференціальне рівняння, що описує такі коливання, і знайдемо наближене розв'язання отриманого рівняння.

Розглянемо елемент стержня довжиною dx, вказавши зусилля N, що діють на цей елемент (рис. 5.1):

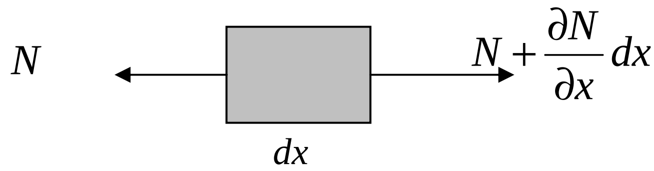


Рис. 5.1 – Розрахункова схема

Зусилля N визначаємо за формулою

$$N = \sigma S = E\varepsilon S = ES\frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad (5.1)$$

де σ - напруга; ε - відносні деформації; $u = u(x,t)$ - переміщення стержня в точці *x* в заданий момент часу *t*.

Рівняння руху елементу стержня має вигляд

$$ma = S\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N + N + \frac{\partial N}{\partial x}dx \ \Rightarrow\ S\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

звідки, згідно (5.1), виходить диференціальне хвильове рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad (5.2)$$

де $a = \sqrt{E/\rho}$

Граничні умови, що описують наш випадок, мають вигляд

$$u(0,t)=0,\ \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=L}=0\ , \tag{5.3}$$

що означає рівність нулю переміщення в нижньому кінці стержня ($x=0$) і поздовжнього переміщення – у верхньому кінці стержня.

Передбачимо, що початкові умови маю вигляд:

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \tag{5.4}$$

Для наближеного розв'язання краєвої задачі використовуємо метод розділення змінних. Нехай $u(x,t)$ мають вигляд

$$u=X(x)T(t)\ . \tag{5.5}$$

Підставимо (5.5) в (5.2), отримаємо:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Оскільки функції в лівій і правій частинах рівняння залежать від різних змінних, то відношення можуть бути рівні лише за умови, якщо вони дорівнюють постійному числу, наприклад $-p^2$ *(це число поки невідоме).*

$$\frac{\ddot{T}}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-p^2$$

Отримаємо два лінійних диференціальних рівняння другого порядку:

$$\ddot{T}+\omega^2T=0\ , \tag{5.6}$$

$$X''+p^2X=0\ , \tag{5.7}$$

де $\omega=ap=p\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

Розв'язання рівняння (5.7) має вигляд

$$X=C\cos px+D\sin px\ . \tag{5.8}$$

Для визначення постійних інтегрування використовуємо граничні умови (5.3), які в нашому випадку наберуть вигляду:

$$\begin{aligned}&X(0)=C\cos 0+D\sin 0=C=0;\\&X'(L)=-D\cos pL=0.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Оскільки D не може дорівнювати нулю, то розв'язання другого рівняння (5.9) буде:

$$\cos pL = 0 \;\Rightarrow\; p_K = \frac{\pi(2k-1)}{2L},\ (k = 1,2....)\,. \tag{5.10}$$

Отримана нескінченна безліч значень p_K, які називаються власними числами. Кожному значенню p_K відповідає власна частота коливань

$$\omega_K = ap_K = p_K\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi(2k-1)}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{5.11}$$

і власна форма коливань

$$X_K = \sin p_K x\,. \tag{5.12}$$

Розв'язання диференціального рівняння (5.6) має вигляд для кожного значення

$$T_K = A_K\cos\omega_K t + B_K\sin\omega_K t\,. \tag{5.13}$$

Таким чином, розв'язання (5.5) з урахуванням (5.10)-(5.11) прийме вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2L}\,. \tag{5.14}$$

Підстановка початкових умов (5.4) приведе до наступних рівнянь:

$$\varphi(x) = \sum A_k\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2L};$$
$$\psi(x) = \sum B_k\omega_k\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2L}.$$

Тоді постійні інтеграції визначаємо таким чином:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin p_K x dx = \frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2L}dx;\\ B_k &= \frac{2}{L\omega}\int_0^L\psi(x)\sin p_K x dx = \frac{2}{L\omega}\int_0^L\psi(x)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2L}dx. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Достатньо задати функції і можна отримати наближене розв'язання краєвої задачі про вільні поздовжні коливання пружного стержня.

Приклад. До вільного кінця стержня прикладена розтягуюча сила P. При t=0 стержень звільнили від зовнішніх сил.

1. Визначити переміщення стержня і власні частоти коливань.

Розв'язання. У цьому випадку початкові умови мають вигляд

$$N(x,t)\big|_{t=0} = ES\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0} = P; \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) = 0 .$$

Використання другої умови приводить до $B_K = 0$. Для визначення A_K спочатку обчислимо частинну похідну, використовуючи (5.14):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k p_K \cos \omega_k t \cdot \cos p_K x ,$$

тоді $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = \frac{P}{SE} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k p_K \cos p_K x$, звідки

$$A_k = \frac{2P}{ESLp_K}\int_0^L \cos p_K x dx = \frac{2P}{ESLp_K^2}\sin p_K x\Big|_0^L = \frac{2P\cdot 4L^2}{ESL\pi^2(2k-1)^2}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2}.$$

Отже $A_k = \frac{8PL}{ES\pi^2(2k-1)^2}\cdot(-1)^k$.

Таким чином, рівняння вільних поздовжніх коливань стержня має вигляд

$$u(x,t) = \frac{8PL}{ES\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2L}\cdot\cos\omega_k t .$$

Перші три власні частоти коливань стержня визначаються за формулами (5.11):

$$\omega_1 = ap_1 = p_1\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}; \ \omega_2 = \frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}; \ \omega_3 = \frac{5\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

2. Знайти наближене розв'язання диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (*)$$

що задовольняє граничним і початковим умовам:

$$u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0 \quad (0\le x\le\pi),$$

$$u(x,0)\big|_{t=0}=x\cdot(\pi-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0\ (0\le t<\infty)\,,$$

методом розділення змінних з використанням VBA.

Розв'язання. Оскільки $a=1,\ L=\pi$, то підстановка граничних умов в (5.8) приводить до рівняння, що визначає власні значення і власні форми коливань:

$$\sin p\pi=0 \ \Rightarrow\ p_K=k \ \ (\mathrm{k}=1,2,3...).$$

Отже отримаємо $X_K=\sin kx$.

Оскільки $\varphi(x)=x\cdot(\pi-x),\ \psi(x)=0$, то з (5.15) отримаємо:

$$A_K=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin kx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin kx dx=-\frac{2\pi}{k}\cos k\pi+\frac{2}{\pi k^3}[(k^2\pi^2-2)\cos k\pi+2]\,.$$

Після простих перетворень отримуємо $A_K=\frac{4}{\pi k^3}[1-\cos k\pi]$. Таким чином, вирозв'язання диференціального рівняння має вигляд

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\cos k\pi)}{k^3}\sin kx\cos kt\,.$$

Складемо текст програми, що підраховує переміщення в точках стержня $x_i=\frac{i\pi}{18}$, $(i=1,2,3..)$. Крок за часом виберемо рівним $\frac{\pi}{18}$. Результати розрахунків виводимо в таблицю. Текст коду процедури:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
L = 3.14159
h = L / 18
th = h
i = 1
For x = 0 To L / 2 Step h
i = i + 1
j = 3
For t = 0 To 18 * th Step th
w = 0
For k = 1 To 100 Step 1
AK = 4 * (1 - Cos(k * L)) / (L * k * k * k)
w = w + AK * Cos(k * t) * Sin(k * x)
Next
j = j + 1
```

```
jj = Trim(Str(j))
Worksheets(2).Cells(j, 1).Value = t
Worksheets(2).Cells(3, i).Value = x
Worksheets(2).Cells(j, i).Value = w
Next
Next
End Sub
```

Таблиця 5.1 – Чисельне розв’язання рівняння

x_i =	**0,0**	**0,17453**	**0,34907**	**0,52360**	**0,69813**	**0,87266**	**1,04720**	**1,22173**	**1,39626**	**1,57080**
t_K	**переміщення $u(x_i,t_i)$**									
0,0000	0,0	0,51785	0,97478	1,37078	1,70586	1,98001	2,19325	2,34556	2,43694	2,46740
0,1745	0,0	0,48739	0,94431	1,34032	1,67540	1,94955	2,16278	2,31509	2,40648	2,43694
0,3491	0,0	0,42647	0,85293	1,24893	1,58401	1,85817	2,07140	2,22371	2,31509	2,34556
0,5236	0,0	0,36554	0,73108	1,09662	1,43170	1,70586	1,91909	2,07140	2,16279	2,19325
0,6981	0,0	0,30462	0,60923	0,91385	1,21847	1,49263	1,70586	1,85817	1,94955	1,98001
0,8727	0,0	0,24370	0,48739	0,73108	0,97478	1,21847	1,43170	1,58401	1,67540	1,70586
1,0472	0,0	0,18277	0,36554	0,54831	0,73108	0,91385	1,09662	1,24893	1,34032	1,37078
1,2217	0,0	0,12185	0,24369	0,36554	0,48739	0,60924	0,73108	0,85293	0,94432	0,97478
1,3963	0,0	0,06092	0,12185	0,18277	0,24370	0,30462	0,36554	0,42647	0,48739	0,51785
1,5708	0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

5.2. Застосування методу сіток для розв’язання хвильового рівняння

Нехай дано диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при довільно заданих граничних і початкових умовах:

$$u(0,t) = \text{f(x)}, \quad u(L,t) = F(x) \quad (0 \le x \le L),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \quad (0 \le t < \infty). \tag{5.16}$$

Розв’яжемо дане рівняння методом сіток. Покриємо область $\{0 \le x \le L; 0 \le t < \infty\}$ прямокутною сіткою: $x_i = ih \ (i = 0,1,2...n)$, $t_j = j\eta \ (\mathrm{j} = 0,1,2....)$, де $h = L/n$, $\eta = \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. На сітці x_i, t_j приблизно замінимо диференціальне рівняння наближеним кінцево-різницевим рівнянням, використовуючи симетричні формули для похідних:

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\eta^2}=a^2\,\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}.$$

При $\eta = h/a$ рівняння спрощується і приймає вигляд

$$u_{i,j+1}+u_{i,j-1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\,,$$

звідки отримаємо:

$$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1}\,. \qquad (5.17)$$

З рівняння (5.17) видно, що для отримання значення переміщення в (j+1) шарі використовують значення *u(x,t)* удвох попередніх шарах j і j-1 (рис. 5.2). Для того, щоб почати обчислення, необхідно знати значення переміщення на двох шарах, тоді як початкові умови (5.16) задаються лише на нульовому шарі j=0. Проте, використовуючи початкові умови, можна визначити *u(x,t)* на фіктивному шарі з номером j=-1. Для цього замінимо похідну в другій початковій умові кінцево-різницевим відношенням:

$$\frac{u_{i,-1}-u_{i,0}}{-\eta}=\psi_i=\psi(x_i)\,.$$

Тоді

$$u_{i,-1}=u_{i,0}-\eta\psi_i\;. \qquad (5.18)$$

Отже, знаючи значення *u(x,t)* в шарі j=-1, можна обчислити переміщення на шарі j=1. Для цього можна використовувати формулу Тейлора:

$$u_{i,1}\approx u_{i,0}+\eta\frac{\partial u_{i,0}}{\partial t}+\frac{\eta^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial t^2}\,.$$

Згідно з рівнянням $\dfrac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial x^2}$ отримаємо:

$$u_{i,1}\approx u_{i,0}+\eta\frac{\partial u_{i,0}}{\partial t}+\frac{a^2\eta^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial x^2}\,.$$

Використання умов (5.16) дозволяє отримати:

$$u_{i,1}\approx\varphi_i+\eta\psi_i+\frac{a^2\eta^2}{2}\varphi_i''\,. \qquad (5.19)$$

Приклад. Методом сіток знайти наближене розв’язання рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

що задовольняє граничним і початковим умовам:

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \quad (0 \le x \le \pi),$$

$$u(x,0)\big|_{t=0} = x \cdot (\pi - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \; (0 \le t < \infty).$$

Розв’язання. Оскільки $a = 0 \Rightarrow \eta = h = \dfrac{\pi}{18}$. Таким чином, відрізок $0 \le x \le \pi$ ділиться на 18 відрізків сітки. Функції $\psi_i = 0;\ \varphi_i = x_i(\pi - x_i) \ \Rightarrow \ \varphi_i'' = -2$. Тоді формула (5.19) набирає вигляду $u_{i,1} = u_{i,0} - 0.030461742$. Далі розв’язання здійснюється за формулою (5.17). Отримані чисельні значення наведені в табл. 5.2, яка створена в MS Excel.

Таблиця 5.2 – Чисельне розв’язання рівняння (*) методом сіток

i / j	i=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x_i =	0	0,17453	0,34907	0,52360	0,69813	0,87266	1,04720	1,22173	1,39626	1,57080
j	t_i	переміщення $u(x_i,t_i)$									
0	0,00000	0	0,51785	0,97478	1,37078	1,70586	1,98001	2,19325	2,34555	2,43694	2,46740
1	0,17453	0	0,48743	0,94436	1,34036	1,67544	1,94960	2,16283	2,31514	2,40652	2,43698
2	0,34907	0	0,42651	0,85302	1,24902	1,58410	1,85826	2,07149	2,22380	2,31518	2,34565
3	0,52360	0	0,36559	0,73117	1,09676	1,43184	1,70599	1,91923	2,07154	2,16292	2,19334
4	0,69813	0	0,30466	0,60933	0,91399	1,21865	1,49281	1,70604	1,85835	1,94969	1,98015
5	0,87266	0	0,24374	0,48748	0,73122	0,97496	1,21870	1,43193	1,58419	1,67558	1,70599
6	1,04720	0	0,18282	0,36563	0,54845	0,73126	0,91408	1,09685	1,24916	1,34050	1,37096
7	1,22173	0	0,12189	0,24379	0,36568	0,48757	0,60942	0,73131	0,85316	0,94454	0,97496
8	1,39626	0	0,06097	0,12194	0,18291	0,24383	0,30480	0,36572	0,42669	0,48762	0,51808
9	1,57080	0	0,00005	0,00009	0,00009	0,00014	0,00014	0,00018	0,00018	0,00023	0,00023

5.3. Задача про поперечні вільні коливання пружного стержня

Диференціальне рівняння в частинних похідних, що описує вільні поперечні коливання пружного стержня має вигляд:

$$a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad(5.20)$$

де $w = w(x,t)$ - поперечні переміщення стержня; $a=\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$; Ej – жорсткість стержня, J – момент інерції поперечного перетину щодо нейтральної осі. Момент, що вигинає, і поперечна сила визначаються за формулами

$$M = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\ \ \mathrm{Q}=\mathrm{EJ}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.\qquad(5.21)$$

Розглянемо стержень, що шарнірно спирається на кінцях. Тоді граничні умови мають вигляд: $w(0,t)=0;\ w(L,t)=0;\ M(0,t)=0;\ M(L,t)=0$.

Врахувавши (5.21), запишемо граничні умови у вигляді

$$w(0,t)=0;\ w(L,t)=0;\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0;\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0.\qquad(5.22)$$

Початкові умови записують у вигляді (5.3).

Для наближеного розв’язання краєвої задачі використовуємо метод поділу змінних. Розв’язання шукатимемо у вигляді

$$u = X(x)T(t)\qquad(5.23)$$

Підставимо (5.19) у (5.16), отримаємо:

$$\frac{X^{IV}}{X}=-\frac{\ddot{T}}{a^2T}=p^4.$$

Звідки маємо лінійні диференціальні рівняння другого і четвертого порядку:

$$\ddot{T}+\omega^2T=0\ ;\qquad(5.24)$$

$$X^{IV}-p^4X=0\ .\qquad(5.25)$$

де $\omega = ap^2 = p^2\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$.

Розв’язання рівняння (5.20) має вигляд

$$X = C\cdot\cos px + D\cdot\sin px + E\cdot chpx + F\cdot shpx,\qquad(5.26)$$

де $chpx$, $shpx$ - косинус і синус гіперболічні. Друга похідна від X має вигляд

$$X'' = -C\cdot p^2\cos px - D\cdot p^2\sin px + E\cdot p^2 chpx + F\cdot p^2 shpx.$$

Підстановка отриманих виразів у граничні умови (5.18) дає систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&X(0) = C + E = 0,\\
&X''(0) = -C + E = 0,\\
&X(L) = C\cdot\cos pL + D\cdot\sin pL + E\cdot chpL + F\cdot shpL = 0,\\
&X''(L) = -C\cos pL - D\cdot\sin pL + E\cdot chpL + F\cdot shpL = 0.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

З перших двох рівнянь системи (5.27) отримуємо C=0, E=0. Система двох останніх рівнянь має ненульове розв’язання лише в разі, коли головний визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \sin pL & shpl \\ -\sin pl & shpl \end{vmatrix} = 2\sin pl\cdot shpl = 0,$$

звідки отримаємо $\sin pL = 0 \;\Rightarrow\; p_K = \dfrac{\pi k}{L},\ (k = 1,2,....)\,.$ (5.28)

Кожному власному значенню p_K відповідає власна форма коливань:

$$X_K(x) = \sin p_K x = \sin\frac{\pi K x}{L}\,. \tag{5.29}$$

На рис. 5.3 подані перші три власні форми коливань стержня:

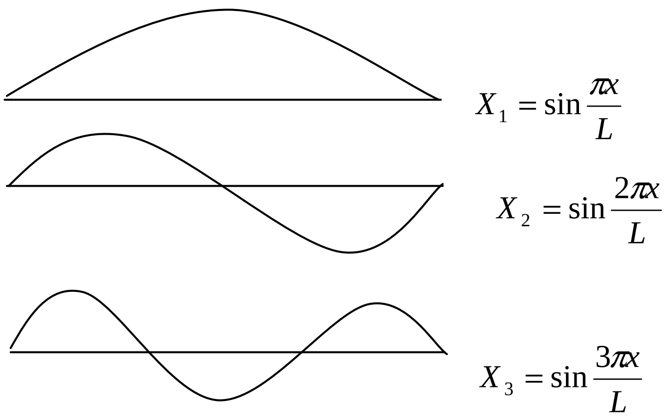


Рис. 5.3 – Власні форми коливань

Кожній власній формі відповідає власна частота коливань вигину $\omega_k = \dfrac{\pi k}{L}\sqrt{\dfrac{EJ}{\rho S}}$. Розв’язання диференціального рівняння (5.20) для кожного значення ω_K має вигляд

$$T_K = A_K\cos\omega_K t + B_K\sin\omega_K t\,. \tag{5.30}$$

Таким чином, розв’язання (5.23) з урахуванням (5.29-5.30) приймає вигляд

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_K\cos\omega_K t+B_K\sin\omega_K t)\sin\frac{\pi kx}{L}. \qquad (5.31)$$

З урахуванням початкових умов: $w(x,0)=\varphi(x);\quad \dot{w}(x,0)=\psi(x)$

За аналогією з пунктом 5.1 отримаємо:

$$\begin{gathered}\varphi(x)=\sum A_k\sin\frac{\pi kx}{L};\;\; \psi(x)=\sum B_k\omega_k\sin\frac{\pi kx}{L};\\ A_k=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{L}dx;\quad B_k=\frac{2}{L\omega}\int_0^L\psi(x)\sin\frac{\pi kx}{L}dx.\end{gathered} \qquad (5.32)$$

Приклад. Знайти рівняння руху пружного шарнірно опертого стержня, якщо початкові умови мають вигляд

$$w(x,0)=\varphi(x)=x(L-x),\;\; \dot{w}(x,t)=\psi(x)=0\,.$$

Розв’язання. Згідно з формулою (5.32) отримаємо:

$$A_k=\frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin\frac{\pi kx}{L}dx;\quad B_k=\frac{2}{L\omega}\int_0^L\psi(x)\sin\frac{\pi kx}{L}dx=0\,.$$

Врахувавши формули обчислення інтегралів:

$$\int_a^b u\sin u du=[\sin u-u\cos u]_a^b,\quad \int_a^b u^2\sin u du=[2u\sin u-(u^2-2)\cos u,]_a^b \quad ,$$

маємо:

$$A_k=2\int_0^L x\sin p_K x dx-\frac{2}{L}\int^L x^2\sin p_K x=\frac{2}{p_K^2}[\sin p_K x-p_K x\cos p_K x]_0^L-\frac{2}{L}[2p_K x\sin p_K x-(p_K^2x^2-2)\cos p_K x]_0^L.$$

звідки
$$A_K=\frac{4}{Lp_K^3}(1-\cos p_K L)=\frac{4L^2}{\pi^3k^3}(1-\cos\pi k)\,.$$

Таким чином, згідно з (5.31) розв’язання диференціального рівняння (5.20) для шарнірно опертого пружного стержня за заданих початкових умов має вигляд

$$w(x,t)=\frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos\pi k}{k^3}\sin\frac{\pi kx}{L}\cdot\cos\omega_K t\,.$$

Розглянемо стержень прямокутного перерізу ($S = bh = 0{,}12 \cdot 0{,}1\,\text{м}^2$) довжиною L=2 м, зроблений із сталі (ρ=7800 кг/м^3, E=2·10^{11} ·н/м^2). Момент інерції визначаємо за формулою $J = (bh^3/12) \cdot 10^{-5}$ м^4.

Текст програми, що визначає чисельне розв'язання останнього рівняння, складений за допомогою VBA, має вигляд

```
Private Sub CommandButton1_Click()
E = 2.2 * 100000000000#
h = 0.1
b=0.12
p = 7.8 * 1000
F = b * h
J = b * (h ^3)*0.00001/12
a = Sqr(E * J / (p * F))
L = 2
w1 = 3.14159 * 3.14159 * a / (L * L)
t = 2 * 3.14159 / w1
i = 3
For tt = 0 To 4 * t Step t / 40
w = 0
For k = 1 To 20 Step 2
pk = 3.14159 * k / L
wk = pk * pk * a
w = w + 4 * cos(wk * tt) * Sin(3.14159 * k / 2) *(1-cos(3.14159*k))/ ((3.14159*k)^3)*L)
Next
i = i + 1
ii = Trim(Str(i))
Worksheets(1).Range("a" + ii).Value = tt
Worksheets(1).Range("b" + ii).Value = w
Next
End Sub
```

2. Знайти рівняння руху пружного стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а другий – вільний.

Розв'язання. У цьому випадку переміщення і кут повороту дорівнюють нулю у закріпленому кінці стержня (*x=0)*. На вільному кінці стержня (x=L) дорівнюють нулю момент, що вигинає, і поперечна сила. Тоді граничні умови мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&w(0,t)=0 \Rightarrow X(0)=0;\\
&\theta=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \;\Rightarrow\; X'(0)=0;\\
&M\big|_{x=L}=0 \;\Rightarrow\; X''(L)=0;\\
&Q=\left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{x=L}=0 \;\Rightarrow\; X'''(0)=0.
\end{aligned} \tag{5.33}
$$

Тоді з (5.26) маємо:

$$
\begin{aligned}
&X = C\cdot\cos px + D\cdot\sin px + E\cdot chpx + F\cdot shpx;\\
&X' = -C\cdot p\sin px + D\cdot p\cos px + E\cdot pshpx + F\cdot pchpx;\\
&X'' = -C\cdot p^2\cos px - D\cdot p^2\sin px + E\cdot p^2 chpx + F\cdot p^2 shpx;\\
&X''' = C\cdot p^3\sin px - D\cdot p^3\cos px + E\cdot p^3 shpx + F\cdot p^3 chpx.
\end{aligned}
$$

І, врахувавши (5.33), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&X(0)=C+E=0,\\
&X'(0)=D+F=0,\\
&X''(L)=-C\cos pL - D\cdot\sin pL + E\cdot chpL + F\cdot shpL = 0,\\
&X'''(L)=C\sin pL - D\cdot\cos pl + E\cdot shpL + F\cdot chpL = 0.
\end{aligned}
$$

Звідки; $E=-C$, $F=-D$,

$$
\begin{aligned}
&C(\cos pL + chpL) + D(\sin pL + shpL) = 0,\\
&C(\sin pL + shpL) - D(\cos pL + chpL) = 0.
\end{aligned}
$$

Система двох останніх рівнянь має ненульове розв'язання лише в разі, коли головний визначник дорівнює нулю, тобто

$$
\begin{vmatrix} \cos pL + chpL & \sin pL + shpL \\ \sin pL + shpL & -\cos pL - chpL \end{vmatrix} = -\cos^2 pL - 2\cos pL\cdot chpL - ch^2 pL - \sin^2 pL + sh^2 pL = 0 .
$$

Звідки отримуємо рівняння для визначення власних значень p_K:

$$
\cos pL\cdot chpL + 1 = 0 .
$$

Його розв'язання можна знайти, використовуючи програму, що реалізовує метод половинного поділу (див. перший розділ). Тоді: $X_K(x)=(\sin p_K L + shp_K L)\cdot(chp_K x - \cos p_K x) - (chp_K L + \cos p_K L)\cdot(shp_K x - \sin p_K x)$ і т. д.

5.4. Розрахунково-графічна робота № 5

Скласти програму для чисельного розв'язання диференціального рівняння (5.20) на основі методу поділу змінних за наступних граничних і початкових умов:

$$w(0,t)=0;\ w(L,t)=0;\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0;\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0\,;$$

$$w(x,0)=\varphi(x)=x(L-x),\ \dot{w}(x,t)=\psi(x)=0\,.$$

Задані наступні значення: довжина балки L=2 м.; щільність матеріалу ρ=7800 кг/м^3; модуль пружності E=21011 н/м^2; площа поперечного перерізу S м^2; момент інерції J м^4. Дані по варіантах подані в табл.. 5.3:

Таблиця 5.3 – Дані по варіантах

№ варіанта	Номер швелера	S 10^4	J 10^8	**№ варіанта**	Номер двутавра	S 10^4	J10^8
1	5	6,16	5,95	**16**	10	12	198
2	6,5	7,51	9,35	**17**	12	14,7	350
3	8	8,98	13,9	**18**	14	17,4	572
4	10	10,9	20,5	**19**	16	20,2	873
5	12	13,3	29,7	**20**	18	23,4	1290
6	14	15,6	51,5	**21**	18а	25,4	1430
7	14а	17	65,2	**22**	20а	26,8	1840
8	16	18,1	72,8	**23**	22	28,9	2030
9	16а	19,5	90,5	**24**	22а	30,6	2550
10	18	20,7	100	**25**	24	32,8	2790
11	18а	22,2	123	**26**	24а	34,8	3460
12	20	23,4	134	**27**	27	37,5	3800
13	20а	25,2	162	**28**	27а	40,2	5010
14	22	26,7	178	**29**	30	43,2	5500
15	22а	28,8	220	**30**	30а	46,5	7080

Вказівки. При складанні програми рекомендується вибрати крок, рівний $t_i=\frac{T_1}{20}=\frac{2\pi}{20\omega_1}$, де T_1 – період коливань, відповідний першій власній частоті $\omega_1=\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$.

5.5. Завдання для самостійного розв'язання

1. Кінці стержня жорстко закладені. Знайти розв'язання диференціального рівняння (5.2) за наступних граничних умов: $u(0,t)=0, \;\; u(L,t)=0$:.

Відповідь: $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t)\sin \frac{\pi k x}{L}$.

2. Знайти розв'язання диференціального рівняння (5.2) за наступних граничних і початкових умов:

$$u(0,t)=0, \;\; u(L,t)=0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases} x \text{ при } 0 \le x \le L/2, \\ L-x \text{ при } \mathrm{L}/2 < x \le L; \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cdot e^{-\frac{(2k-1)^2 a^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{\pi(2k-1)x}{L}$.

3. Знайти власні форми поперечних вільних коливань пружного стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а другий – шарнірно опертий.

Відповідь: Власні значення визначають з рівняння $tgp_K L = thp_K L$, власна форма коливань має вигляд

$X_K(x)=(shp_K L+\sin p_K L)\cdot(chp_K x-\cos p_K x)-(chp_K L+\cos p_K L)\cdot(shp_K x-\sin p_K x)$.

4. Знайти власні форми поперечних вільних коливань пружного стержня, обидва кінці якого жорстко закладено.

Відповідь: Власні значення визначають з рівняння $\cos p_K L\cdot chp_K L-1=0$, власна форма коливань має вигляд

$X_K(x)=(shp_K L-\sin p_K L)\cdot(chp_K x-\cos p_K x)-(chp_K L-\cos p_K L)\cdot(shp_K x-\sin p_K x)$.

5.6. Питання до теми

1. У чому суть методу поділу змінних для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних?

2. Скільки граничних умов необхідно задати для розв'язання хвильового рівняння?

3. Як впливають на розв'язання диференціального рівняння граничні і початкові умови?

4. У чому полягає метод сіток?

5. Скільки граничних умов необхідно задати для розв'язання задачі про поперечні коливання пружного стержня?

6. Як отримати рівняння для знаходження власних значень?

7. Як визначають власні форми коливань і їх графічну інтерпретацію?

Додаток

1. Запис формул у чарунках і таблицях

При записі формул треба пам'ятати три правила:

<u>Перше правило</u>: **будь-яка формула починається із знаку рівняння "=" і вводиться без пропусків.**

<u>Друге правило</u>: **адреси чавунків записують лише з використанням букв англійського алфавіту (рядкові або прописні – без різниці).**

<u>Третє правило</u>: **формулу краще всього редагувати в рядку формул.**

Заповніть стовпці A і B. Треба перемножити числа стовпців A і B, а результат вивести в стовпці C.

Зробіть активною чарунку C1 і введіть в неї формулу: **=A1*B1** і натисніть клавішу **Enter**. Для цього спочатку натисніть знак «=», потім клацніть по чарунці A1, натисніть знак * (краще на цифровій клавіатурі праворуч) і натисніть B1. Після цього натисніть клавішу **Enter**.

	A	**B**	**C**
1	**2**	**3**	**=A1*B1**
2	**4**	**6**	
3	**6**	**9**	
4	**8**	**12**	
5	**10**	**15**	

У чарунці C1 з'явиться результат множення змісту чарунки A1 на зміст чарунки B1. Поверніться в чарунку C1. *У рядку формул буде записана введена вами формула**: =A1*B1***

Таким чином, якщо в чарунку введена формула, то вона з'явиться у рядку формул, а в самій чарунці – результат розрахунків за цією формулою.

Що робити далі? Можна, звичайно, перейти до чарунки C2 і знову записати формулу: =A2*B2 і т.д. Але це нераціонально, особливо для великих таблиць. Excel пропонує прекрасний прийом копіювання формули, при якому адреси чарунок автоматично переписуватимуться відповідно до розташування чарунок. Для того, щоб скопіювати формулу, поверніться в чарунку С1 і встановіть курсор миші в **нижній правий кут так, щоб він прийняв вид маленького чорного хрестика**, натисніть ЛК і, не відпускаючи її, перемістіть курсор миші вниз по стовпцю С, до останнього рядка таблиці. Відпустіть ЛК. На екрані з'явиться результат множення стовпця А на стовпець В. Клацніть, наприклад, по чарунці С4. У рядку формул ви побачите запис: **=A4*B4** , яку записала при копіюванні сама програма.

Отже досить ввести формулу один раз, а потім скопіювати її по рядках або стовпцях. Адреси чарунків у формулі перепишуться автоматично.

При записі формул можна використовувати оператори: + (складання), - (віднімання), **/** (ділення), ***** (множення), **^** - зведення у степінь. Під час обчислень в першу чергу виконують дії в дужках. Множення і ділення виконують раніше складання і віднімання. Оператори, що мають однаковий пріоритет, виконуються зліва направо.

Якщо формула введена невірно, в чарунці з'являється повідомлення про помилку. Ось деякі повідомлення:

#ДЕЛ/0	Спроба ділення на нуль
#ІМ'Я?	Використовується ім'я, відсутнє в списку
#ЗНАЧ!	Введена математична формула, яка посилається на текст
#ССЫЛКА!	Відсутній діапазон чарунок, на який посилається формула

У правилі 1 було зроблене зауваження про те, що пропуски усередині формули недопустимі. Але якщо формула довга, в неї можна включити символи табуляції і розриви рядків. Тоді формула легко сприймається. Для того, щоб ввести символи табуляції, встановіть в рядку формул текстовий курсор в задану позицію і натисніть сукупність клавіш Ctrl-Alt-Tab. Розрив рядка з'являється при натисненні клавіш Alt-Tab.

2. Використання констант у формулах

Адреси чарунок, використаних у формулі, називають відносними, оскільки вони змінюються при копіюванні формули. Іноді необхідно зафіксувати адресу чарунки або серії чарунок, тобто зробити її абсолютною. Наприклад, крок h міститься в чарунці, скажімо B1. Як зробити адресу чарунки B1 абсолютною? Для цього перед координатою рядка або стовпця (або і рядка, і стовпця) у формулах поміщають знак долара $.

У чарунці A4 введемо перше значення x, рівне 1. У чарунку B1 запишемо значення кроку: 0,05. Наше завдання: у чарунку A5 ввести формулу так, щоб при копіюванні хрестиком до попереднього значення додавався крок.

Спочатку введіть формулу: **=A4*B1.**

Потім клацніть в рядок формул так, щоб текстовий курсор з'явився в кінці формули. Натисніть клавішу F4 на клавіатурі. Формула зміниться: **=A4*$B$1** Натисніть Enter, поверніться в чарунку і скопіюйте хрестиком вниз:

крок h= 0,05

X
1
1,05
1,1
1,15
1,2
1,25
1,3
1,35
1,4
1,45
1,5

3. Підсумовування рядків і стовпців

У більшості таблиць необхідно просто підсумувати числа в рядках і стовпцях. Для цього застосовується вбудована функція автопідсумовування. Наприклад, ми хочемо знайти суми чисел у стовпці A. Виберіть чарунку A6. Натисніть на панелі інструментів на кнопку ∑ **(**автосума). У чарунці A6 з'явиться формула: **=СУММ(A1:A5)**. Це означає, що програма підключила вбудовану функцію підсумовування. Аргумент функції: A1:A5 вказує на діапазон чарунок, які труба підсумувати. Натисніть клавішу **Enter** . Формула може копіюватися хрестиком. Коли натискається кнопка "Автосума", програма визначає зону підсумовування. Якщо запропонований діапазон не влаштовує, то за допомогою миші можна позначити інший діапазон чарунків.

4. Використання вбудованих функцій

Excel містить велику кількість вбудованих функцій: математичних, статистичних фінансових і т.д. З однією з цих функцій ми вже познайомилися. Це функція **СУММ( ).** Кожна функція має унікальне ім'я. Воно вказує на призначення функції. Аргументи функції записують у круглих дужках. Дуже корисна функція **ОКРУГЛ( )**, яка дозволяє округляти число до заданої кількості знаків після коми. Загальний вигляд функції:

=**ОКРУГЛ**(число або адреса чарунки ; число цифр після коми)

Для прикладу:

1) введіть у чарунку F10 число 10
2) введіть у чарунку G10 число 6.
3) у чарунку H10 запишіть формулу: **=F10/G10**
4) Натисніть клавішу **Enter**.

З'явиться результат: 1,666667.

Повернемося в чарунку H10. Клацніть по рядку формул і змініть формулу: **=ОКРУГЛ(F10/G10;2)** Натисніть клавішу **Enter**. Результат: 1,67.

Використання вбудованих функцій полегшує завдання введення формул.

Видаліть формулу з чарунки H10. Клацніть ЛК по знаку «=» зліва від рядка формул. З'явиться список вбудованих функцій (рис. 1):

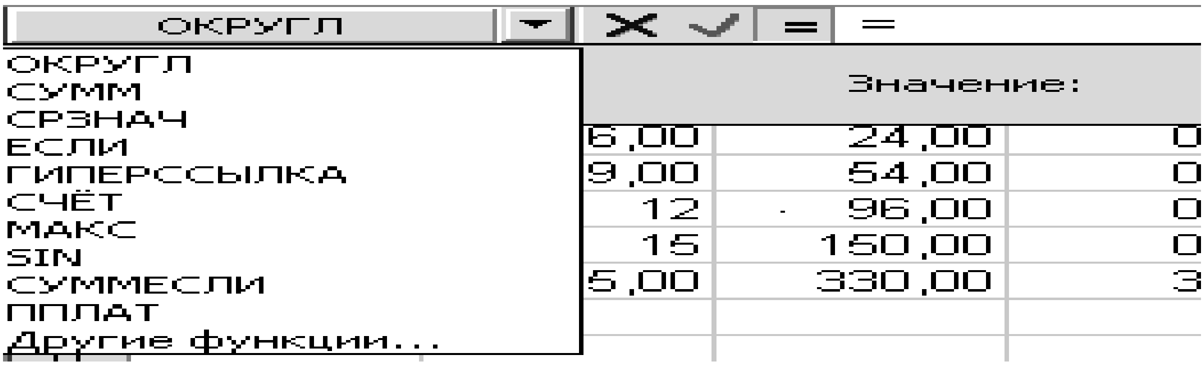


Рис. 1 - Вибір функції

Відкрийте список функцій, клацнувши по стрілці. Виберіть функцію **ОКРУГЛ**. Якщо її не опиниться в списку, клацніть по пункту "Другие функции". З'явиться вікно з повним списком вбудованих функцій, в якому можна знайти **ОКРУГЛ.**

Після вибору функції заповніть поля:

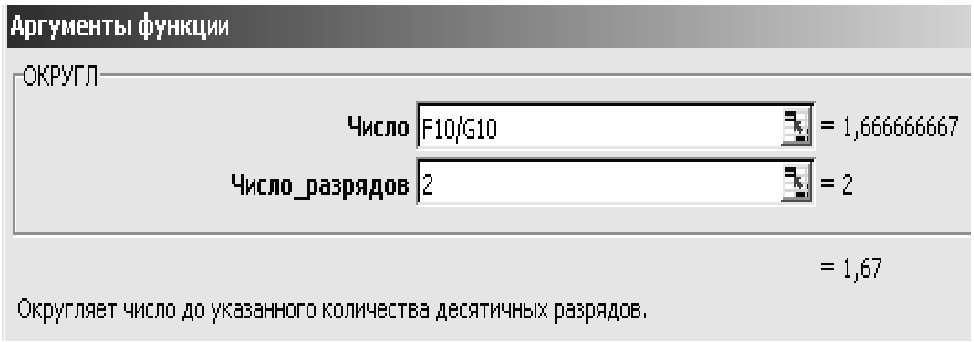


Рис. 2 – Формування аргументу функції округлення

1) у полі "число" введіть F10/G10, натисніть клавішу **Tab**.
2) у полі “число _разрядов” введіть цифру **2** і натисніть клавішу **Enter**. Формула введена! (рис. 2).

Встановіть табличний курсор у вільну чарунку. Для виклику майстра натисніть кнопочку $\mathbf{f_x}$ на панелі інструментів. З'явиться знайоме вікно (рис 3.11). Зліва пераховані категорії функцій, справа список для даної категорії. Майстер дозволяє вивчити різні функції.

Користувач може створювати **власні** функції і програми за допомогою вбудованої мови об'єктно-орієнтованого програмування **Visual Basic for Applications (VBA)**.

Excel надає достатньо повний набір математичних функції, які використовуються при розв’язанні досить складних задач:

Функція	Аргумент	Призначення
КОРЕНЬ()	число	Обчислює квадратний корінь
СТЕПЕНЬ()	показник степеня	виводить результат зведення у степінь
РАДИАНЫ()	значення кута в градусах	перетворить градуси в радіани
ГРАДУСЫ()	значення кута в радіанах	перетворить радіани в градуси
ПИ()		виводить число π=3,14159265.
ЦЕЛОЕ()	число	округляє число до найближчого меншого цілого
SIN()	кут в радіанах	обчислює синус кута
COS()	кут в радіанах	обчислює косинус кута
EXP()	число	обчислює експоненту аргументу
LN()	число	обчислює натуральний логарифм
ABS()	число	виводить абсолютне значення аргументу

МОПРЕД()	масив, в якому зберігається матриця	обчислює визначника матриці
МОБР()	масив, в якому зберігається матриця	обчислює транспоновану матрицю
МУМНОЖ()	два масиви, в яких зберігаються матриці	обчислює добуток матриць
ФАКТР()	Число	Обчислює n!

Приклад. Розв'яжіть системy лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Позначимо головну матрицю через А, а матрицю вільних членів через В. Тоді розв'язати матрицю можна через Х:

$$\mathbf{X = A^{-1}B,}$$

де A^{-1} – обернена матриця.

Отже для того, щоб розв'язати систему рівнянь, складемо дві матриці і введемо формули, які визначать транспоновану матрицю і добуток матриць. Для цього:

1. Складіть два масиви для матриць А і В і **помітьте квадратну область,** починаючи з чарунки Н2 по К5 включно (рис. 3);

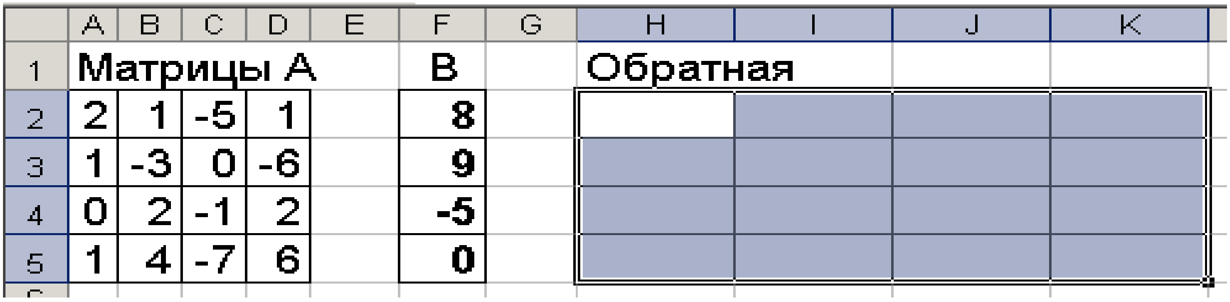


Рис 3 – Підготовка даних

2. Натисніть fx і виберіть із списку функцію **МОБР**(). Натисніть кольорову кнопочку праворуч від поля "Масив" і помітьте числа матриця А, після чого натисніть **Enter** і **ОК**. У чарунки Н2 з'явиться перший елемент зворотної матриці. Для віддзеркалення всіх елементів натисніть клавішу **F2**, а потім **Enter** при натиснутих одночасно клавішах **Ctrl** і **Shift**.

3. Задайте числовий формат чарунок даної області з двома знаками після коми.

4. Помітьте стовпець чарунок з M2 по M5 і викличте функцію **МУМНОЖ**(). Помітьте масив 1 – обернену матрицю A^{-1}, масив 2 – матрицю-стовпець B. Натисніть ОК. Для відображення всіх елементів матриці розв’язань X натисніть клавішу F2, а потім Enter при натиснутих одночасне клавішах Ctrl і Shift.

На рис 4 представлено результат розв’язання системи рівнянь матричним методом:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Матрицы A					B		Обратная					X
2	2	1	-5	1		8		1,33	-0,67	0,33	-1,00		3
3	1	-3	0	-6		9		-0,07	0,26	1,15	-0,11		-4
4	0	2	-1	2		-5		0,37	-0,30	0,26	-0,44		-1
5	1	4	-7	6		0		0,26	-0,41	-0,52	-0,11		1
6													

Рис.п.4 - Розв’язання системи рівнянь матричним методом

5. Використання VBA для створення додатків

Мова програмування **VBA** – **Visual Basic for Applications** вбудована в MS Office. За допомогою VBA можна створювати як прості функції і процедури, так і додатків на базі Word, Excel, Access. У VBA застосовується об'єктно-орієнтований підхід до розробки додатків.

5.1. Елементи мови VBA. Для того, щоб з робочої книги запускати редактор VBA, треба натиснути клавіші Alt і F11. З'явиться вікно, що складається з головного меню, панелі інструментів і декількох вікон. Це вікна проекту, властивостей і модуля. В останньому вікні записується текст програм. Модулів може бути декілька. Нижче подана інформація, необхідна для написання кодів процедур.

5.1.1. Оператори мови

Умовний оператор

If умова **then**
[блок інструкцій 1]
else
[блок інструкцій 2]
endif
	Якщо умова – істина (TRUE), то виконується блок інструкцій 1, інакше управління передається операторам другого блоку.

Оператори циклів

Використання циклів дозволяє повторно виконувати набір інструкцій, поки умова має значення істина -TRUE.

Види циклів:

While *умова* ***[інструкції]*** **Wend**	Якщо ***умова*** – істина, то виконуються інструкції до **Wend**. Потім управління повертається до початку циклу і знову перевіряється ***умова.*** Процес повторюється, поки ***умова*** – TRUE. Якщо ж ***умова*** не виконана, то цикл уривається і триває виконання інструкцій після Wend.
Do (while ***умова***) [інструкції] **Exit Do** [інструкції] Loop	Тут ***умова*** – це необов'язковий елемент. Особливість – наявність оператора Exit Do, що дозволяє вийти з циклу і передати управління інструкціям, що стоять після LOOP.
For сч=N1 **to** N2 [**Step** крок] [інструкції] **Exit For** [інструкції] **Next**	Сч –счетчик – обов'язковий елемент N1 – початок і N2-кінець містять відповідні значення лічильника, крок – елемент необов'язковий. Цикл працює до тих пір, поки лічильник не перевищить кінцеве значення N2

Приклад Необхідно підрахувати суму чисел від 1 до 100.

1 спосіб:	2 спосіб	3 спосіб
i=0 s=0 while i<100 i=i+1 s=s+i wend	s=0 i=0 do i=i+1 s=s+i if i>=100 then exit do loop	s=0 for i=1 to 100 s=s+i next

5.1.2. Підпрограми і функції

При розробці додатків потрібно виконувати одні і ті ж дії в різних модулях програми. Для таких випадків є сенс написати спеціальні підпрограми – процедури або створити нову функцію, яка увійде до складу функцій Excel.

Оператор процедури	Оператор функції
SUB ім'я ([список аргум]) [інструкції] [Exit Sub] [інструкції] **END SUB**	**FUNCTION ім'я (список аргум) [as тип]** **[інструкції]** **имя= вираз** [Exit Sub] [інструкції] **имя= вираз** **END FUNCTION**

Тут ім'я – обов'язковий параметр, а список аргументів і тип функції може бути не вказаний.

5.1.3. Стандартні функції VBA, використовувані далі

Функція	Коментар
Val(рядок)	перетворить числа в рядку в числове значення
Str(число)	перетворить число в символьний рядок
Trim(рядок)	видаляє зайві пропуски з рядка
Len(рядок)	підраховує довжину рядка

Mid(строка,нн,дл)	виділяє з рядка підрядок, починаючи з позиції "**нн**", "**дл**" - довжина підрядка
Int(число)	відкидає дробову частину числа і повертає цілу частину
Abs(число**)**	повертає абсолютне значення числа
Sqr(число**)**	обчислює квадратний корінь з числа
Month(дата)	виділяє номер місяця
Day(дата)	виділяє день
Year(дата)	виділяє рік

5.2. Деякі відомості про об'єктне програмування

VBA включає засоби, що дозволяють працювати з **об'єктами**. Як об'єкт можна розглядати робочу книгу Excel, робочі листи, кнопки і списки, що розкриваються, і т.д. Параметри об'єкта, що його характеризують, називаються **властивості**. Наприклад, кнопка може бути певного кольору і розташована у визначеному місці листа або форми. Отже є набір властивостей, які визначають її зовнішній вигляд і розташування. Об'єктом управляють за допомогою **методів**. Метод – код програми, яка впливає на об'єкт і його параметри. Програми починають виконуватися при виникненні **подій**. Подія є дію, розпізнавана об'єктом. Це може бути клацання мишею по кнопці, вибір із списку, перемикання на новий режим і т.д. Активізація методу може відбутися без участі користувача, наприклад, при виникненні помилок під час обробки інформації. Найчастіше використовуються дві події:

1) клацання лівою кнопкою миші – **Click**;
2) подвійне клацання миші –DoubleClick.

Якщо записати коди у відповідні підпрограми, то можна легко керувати додатками.

Важливе поняття об'єктно-орієнтованого програмування – **класи.** Клас – це шаблон, на основі якого створюється об'єкт. Клас зберігає первинну інформацію про властивості й методи об'єкта. Об'єкт, створений на основі класу, називається **екземпляром** класу.

Основними об'єктами табличного процесора Excel є об'єкти Application, Workbooks, Worksheets, Range. Звернемо особливу увагу на два об'єкти.

Сімейство Worksheets (робочі листи) включає безліч об'єктів Worksheet (робочий лист) в робочій книзі. Для того, щоб зробити посилання на певний лист, наприклад "лист 2", треба записати код Worksheets(“лист2”). Для того, щоб вибраний лист став активним, треба записати команду:

Worksheets(“лист2”).activate

Можна вказати лише номер листа. Запис матиме вигляд:

Worksheets(2).activate

Частіше доводиться використовувати об'єкт **RANGE**. Він може бути однією чарункою, рядком, стовпцем, сукупністю чарунок. Об'єкт **Selection** тісно пов'язан з об'єктом Range – це будь-які виділені чарунки. У таблиці представлені основні властивості об'єкта Range:

Властивість	Коментар
adress	Визначає адресу чарунки
cells()	Визначає задану чарунку
name	Встановлює ім'я діапазону
columns	Визначає сукупність стовпців діапазону
rows	Визначає сукупність рядків діапазону
count	Визначає кількість об'єктів в діапазоні
column	Визначає номер першого стовпця діапазону
row	Визначає номер першого рядка діапазону
top	Визначає відстань від верхнього краю 1 -го рядка до верхнього краю діапазону
left	Визначає відстань від лівого краю 1 -го стовпця до лівого краю діапазону
value	Визначає або задає значення вказаної чарунки
borders	Визначає межі і обрамлення чарунок діапазону

Властивості, які ми використовуватимемо далі, в таблиці виділені.

Наприклад, в ході виконання програми треба привласнити змінній **wdata** вміст чарунки **B6**, в якій зберігається дата. Код має вигляд:

wdata=Worksheets(“лист1”).range(“B6”).value

Можна використовувати іншу властивість:

wdata=Worksheets(1).cells(6,2).value

Тут cells(6,2) – адреса чарунки B6 – 6-й рядок, 2-ої стовпець.

5.3. Елементи керування

Крім перерахованих об'єктів існують так звані елементи керування, вбудовані в VBA. Вони також є об'єктами, тобто володіють властивостями, методами і подіями. Елементи керування створюються за допомогою відповідної панелі інструментів (рис. п.5):

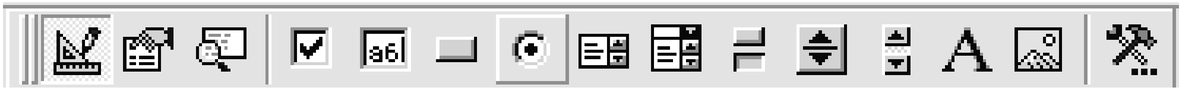


Рис.5 – Панель "Елементи управління"

Для виклику панелі клацніть правою кнопкою миші по будь-якій з існуючих панелей і виберіть панель **"Элементы управления" (ЭУ)** з контекстного меню. Тепер можна легко розміщувати об'єкти керування на робочому листі.

Нижче подані основні характеристики:

Назва ЭУ	Ім'я в VBA
Кнопка	CommonButton
Прапорець	CheckBox
Напис	Label
Перемикач	OptionGroup
Список	Listbox
Список, що розкривається	ComboBox
Вимикач	ToggleButton
Лічильник	SpinButton
Смуга прокрутки	ScrollBar
Поле редагування	TextBox

По кнопках проводиться тільки **одне клацання ЛК (**подія Click**).** У результаті виконується задана процедура. Для розміщення елемента керування на робочому листі треба клацнути по кнопочці, що зображує цей об'єкт на панелі «ЭУ», помістити курсор миші в потрібне місце листа і знову натиснути ЛК, а потім (якщо необхідно) змінити розміри об'єкта.

Зверніть увагу на три кнопочки, що знаходяться зліва на панелі інструментів «ЭУ»: **режим конструктора, властивості і початковий текст**. Клацнувши по кнопочці "**Режим конструктора"**, користувач може приступити до впровадження згаданих об'єктів, змінювати їх властивості, записувати код програм.

Вікно " Свойства" і редактор VBA можна викликати по-іншому. Досить клацнути правою кнопкою усередині упровадженого об'єкта і вибрати відповідний пункт з контекстного меню.

Приклад. Відкрийте робочу книгу. Викличте панель "Елементи керування", помітивши її у верхній частині екрану. Клацніть по кнопці "кнопка" панелі ЭУ, потім клацніть в якому-небудь місці листа. З'явиться об'єкт "кнопка" (CommandButton1). Помітьте упроваджений об'єкт і клацніть по кнопці "**властивості**" на панелі Э. Активізується діалогове вікно (рис. п.6).

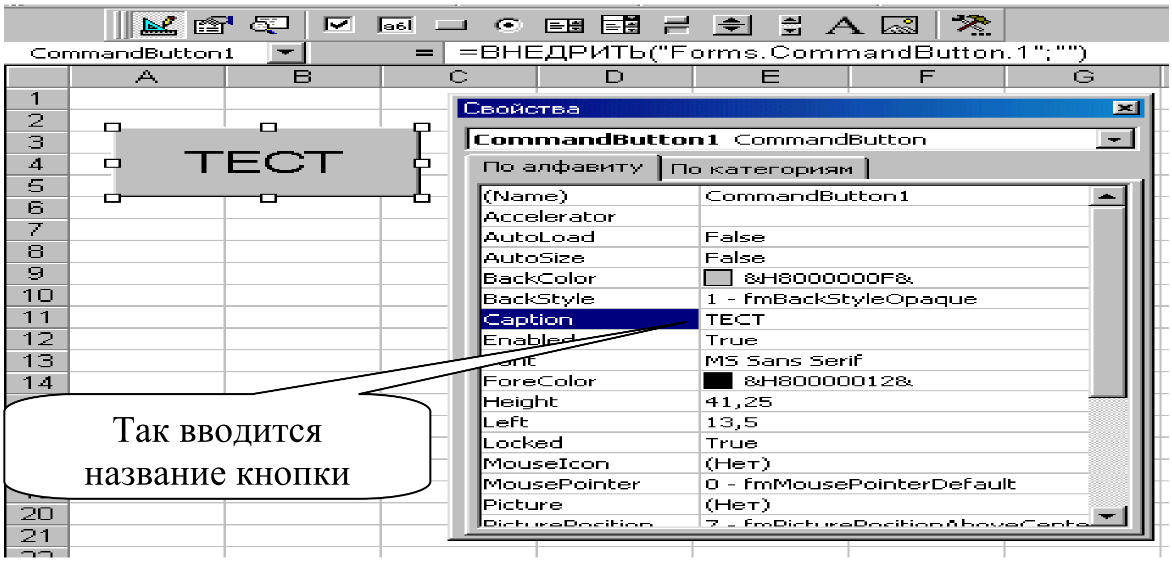


Рис.6 – Вікно властивостей для об'єкту "кнопка"

Клацніть по пункту списку властивостей **Caption** (заголовок) і введіть назву кнопки "ТЕСТ".

Основна подія для об'єкта "кнопка" - клацання мишею, тобто **Click**. Обробляється ця подія за допомогою процедури Private Sub CommonButton1_Click(), яка записується у вікні редактора VBA. Складіть програму, яка видає повідомлення про успішне проходження тесту. Для цього клацніть двічі ЛК по кнопці "ТЕСТ"

З'явиться вікно редактора коду. Введіть код. Вид вікна разом з кодом показаний на рис. 7. Збережіть документ під яким-небудь ім'ям, наприклад "ТЕСТ", і поверніться в робочий лист з упровадженою кнопкою.

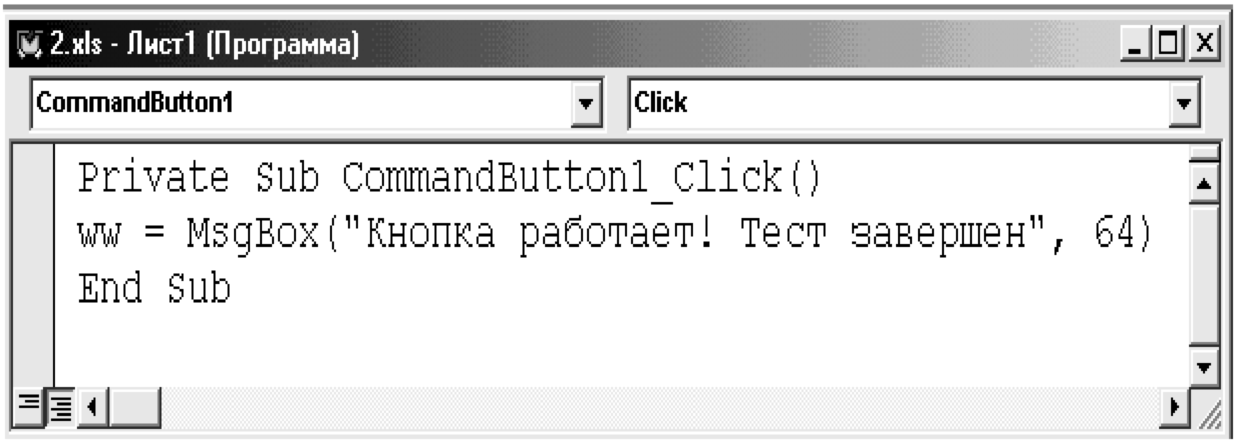


Рис.7 – Текст коду процедури Click

Клацніть по кнопці " Выход из режима конструктора" (крайня ліворуч кнопка на панелі ЭУ). Таким чином, упроваджений об'єкт – кнопка ТЕСТ готовий до використання. Якщо натиснути кнопку, то з'явиться вікно з повідомленням: "Кнопка работает! Тест завершен".

Кожен елемент керування має як загальні, так і індивідуальні властивості, управляється за допомогою конкретних методів за наявності конкретних подій. Наприклад, головна подія для кнопки – клацання ЛК (Click). Список може реагувати на декілька подій. Наприклад, відбір із списку може здійснюватися як при клацанні ЛК по вибраному пункту, так і при подвійному клацанні (DblClick). При наведенні складних прикладів перераховуватимуться згадані характеристики елементів керування.

Список літератури

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. - СПб.: Лань, 2003.-736 с.

2. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. - К.: Либідь, 2003.

3. Кн.1. Основні розділи. - 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. - 368 с.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. - М.:Наука, 1985.

5. Лунгу К.Н., Письменний Д.Т. Збірник задач по вищій математиці 1,2 т. 2004 р, 675 с.

6. Станішевський С.О. Вища математика. - Харків: ХНАМГ, 2005.-270 с.

7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа- М.: Наука.

8. Демидович Б.П., Марон И. А. Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: ГИФМЛ, 1963 – 400 с.

9. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. - М.: ГИФМЛ, 1962 – 356 с.

10. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

11. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977. – 228 с.

12. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высш. шк., 1990. -208 с.

13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.- 576 с.

14. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - К.: Наукова думка, 1988. – 725 с.